This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

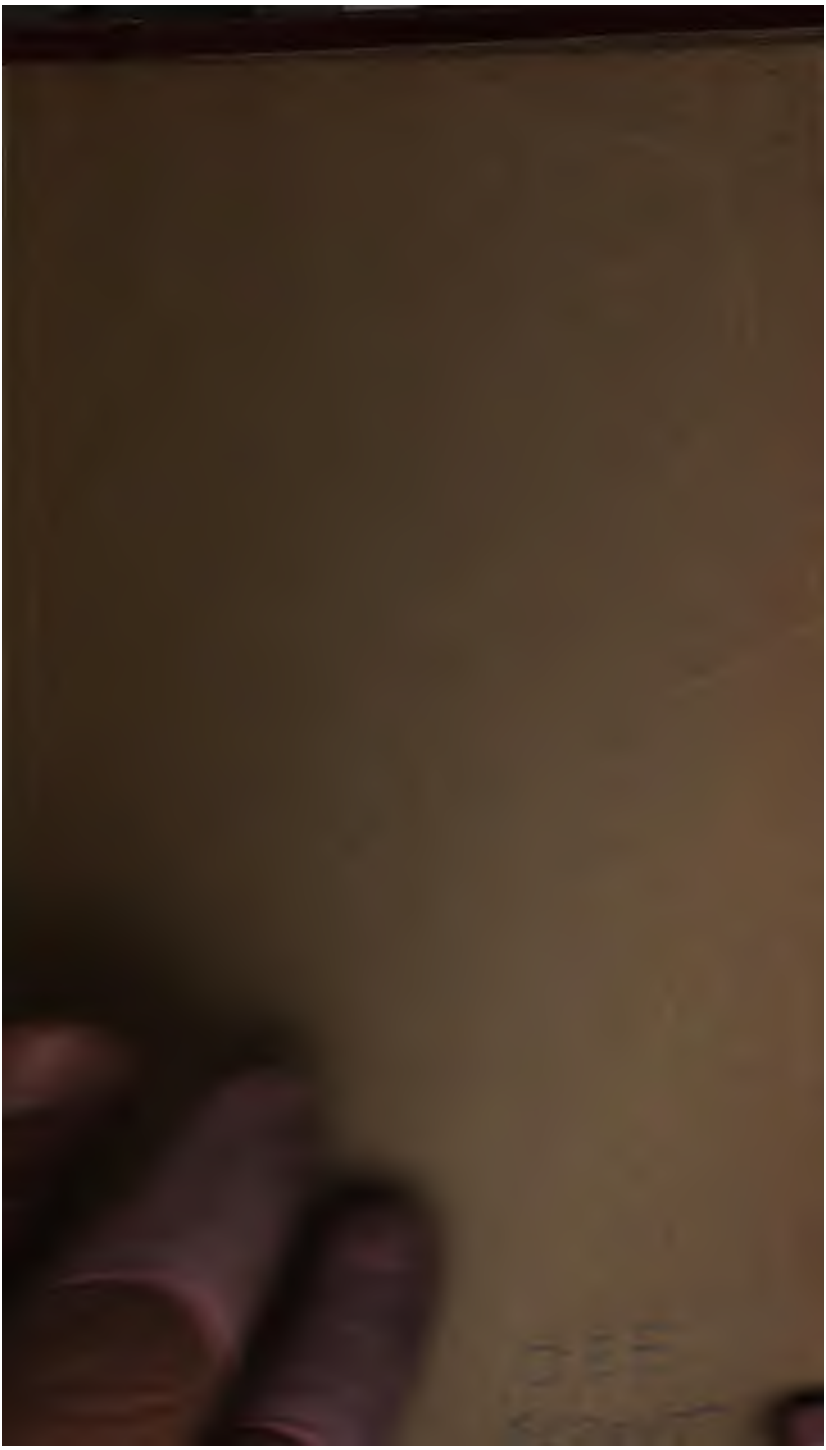
À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06636597 8

1. Mathematics — Textbooks, 1816

TD



TRAITÉ

D'ARITHMÉTIQUE,

A L'USAGE

DE LA MARINE ET DE L'ARTILLERIE,

PAR BEZOUT;

AVEC DES NOTES ET DES TABLES DE LOGARITHMES,

PAR A. A. L. REYNAUD,

Chevalier de la Légion-d'Honneur, Examinateur des Candidats de l'École Royale Polytechnique, etc.

OUVRAGE ADOPTÉ PAR L'UNIVERSITÉ ROYALE.

HUITIÈME ÉDITION.

PARIS,

Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libaire pour les Sciences, rue du Jardinet, n° 12, et quai des Augustins, n° 57.

1816.

AVIS DE L'ÉDITEUR.

Nous pouvons assurer que cette édition est une des plus correctes. M. *Reynaud* a revu, avec le plus grand soin, les calculs et le texte, et il a ajouté une table très-détaillée, des théories renfermées dans l'*Arithmétique* de *Bezout* et dans les *Notes*.

OUVRAGES DE M. REYNAUD.

1°. *Traité d'Arithmétique*, à l'usage des Ingénieurs du Cadastre.
2°. *Traité d'Arithmétique*, à l'usage des Élèves qui se destinent à l'École Polytechnique (6e édition).
3°. *Elémens d'Algèbre*, 1re section (3e édition).
4°. *Elémens d'Algèbre*, 2e section (1re édition).
5°. *Trigonométrie analytique*, suivie des Tables de Logarithmes de M. *Lalande*.
6°. *Fragmens sur l'Algèbre et la Trigonométrie*.
7°. *Manuel de l'Ingénieur du Cadastre*, par MM. Pommiés et Reynaud.
8°. *Traité d'Arpentage de Lagrive*, avec les *Notes de Reynaud*. Ces Notes contiennent, la *Théorie des rentes perpétuelles et viagères*, toutes les questions relatives à l'intérêt de l'argent, avec des Tables de Logarithmes.

Notes sur Bezout par Reynaud.

9°. *Arithmétique de Bezout*, avec Notes (8e édition).
10°. *Géométrie de Bezout*, revue par *Reynaud*, et augmentée de Notes divisées en trois parties; la première est destinée à compléter la Géométrie de Bezout, en levant les principales difficultés de la Géométrie; la seconde offre une collection de Problèmes et de Théorèmes; la troisième contient la *Théorie des plans* et les Elémens de la *Géométrie descriptive*.
11°. *Algèbre* et *Application de l'Algèbre à la Géométrie* de Bezout, avec des Notes.

Nota. L'*Arithmétique* (8e édition), l'*Algèbre* (1re et 2e sections), *la Trigonométrie analytique*, et les Notes sur la *Géométrie* et l'*Algèbre* de Bezout, sont particulièrement destinées aux Elèves qui se proposent d'entrer à l'Ecole Polytechnique. Ces ouvrages renferment les solutions des principales difficultés relatives aux examens.

PRÉFACE DE BEZOUT.

Le Cours de Mathématiques dont nous donnons aujourd'hui la première partie, doit rassembler les connaissances élémentaires nécessaires aux Gardes du Pavillon et de la Marine, pour être admis au rang d'Officiers de vaisseaux.

Quelque utile qu'il soit d'instruire de bonne heure ces jeunes Élèves dans la pratique d'un art aussi étendu que celui de la Navigation, on ne peut douter que la connaissance préliminaire des principes sur lesquels portent les règles de l'art, ne doive contribuer beaucoup à faire fructifier les leçons qu'ils recevront ensuite de l'expérience, et ne les dispose à y être plus attentifs, et par conséquent n'accélère beaucoup leurs progrès.

D'ailleurs, il est si rare qu'un esprit accoutumé à obéir servilement aux seules règles de la pratique, se replie ensuite assez sur lui-même, pour revenir avec succès à l'étude de la théorie, qu'on ne peut trop tôt les disposer à profiter des avantages qu'ils peuvent retirer de celle-ci.

Presque toutes les méthodes de la navigation-pratique sont fondées sur des connaissances mathématiques : comment pourrait-on différer d'instruire des principes de cette science, ceux qui sont destinés à en diriger un jour l'application?

Pour me conformer, autant qu'il est en moi, aux vues des personnes qui ont bien voulu me confier l'examen des études des Gardes du Pavillon et de la Marine, ainsi que la composition d'un Cours de Mathématiques à leur usage, j'ai cru devoir m'attacher à concilier ces deux points : la nécessité d'instruire ces Élèves sur les connaissances mathématiques relatives à leur objet, et celle de les en instruire dans un intervalle de temps qui ne leur fit rien perdre de l'avantage qu'il doit y avoir à aller de bonne heure sur la mer.

Pour satisfaire à ces deux objets, je me suis proposé, 1° de borner le Cours des études d'obligation aux propositions directement utiles à la Navigation, et à celles qui seraient indispensables pour l'intelligence de celles-là; 2° de faciliter cette étude, en la rendant plus intéressante par de fréquentes applications à la pratique, prises principalement dans la Marine;

ce qui réunit encore l'avantage de disposer l'esprit des Commençans à saisir de bonne heure le lien qui unit la théorie à la pratique.

Mais dans la vue de concourir, autant qu'il m'est possible, aux progrès d'un art aussi important, j'ai cru devoir ne pas perdre de vue ceux de ces jeunes Élèves qui, joignant à une noble émulation, des dispositions plus marquées que les autres, auraient le desir de s'instruire plus parfaitement. C'est dans cette vue que j'aurai soin de répandre dans ce Cours, des connaissances plus étendues, et spécialement celles qui peuvent faciliter l'intelligence des ouvrages de feu M. Bouguer, et de quelques autres ouvrages non moins utiles à la Marine, dont on n'a pas encore retiré, à beaucoup près, tout le fruit qu'on peut en espérer, parce que les études des Gardes n'y étaient pas dirigées aussi pleinement qu'on se propose de le faire.

Ces connaissances qu'il est louable d'acquérir, et auxquelles on ne peut trop inviter les Gardes du Pavillon et de la Marine de s'appliquer; ces connaissances, dis-je, ne seront point d'obligation, et nous aurons soin de les distinguer de celles-ci, par un *caractère* dont nous avertirons.

Le *Cours de Mathématiques* dont il s'agit ici, sera divisé en quatre Parties.

La première traitera de l'Arithmétique.

La seconde traitera de la Géométrie, dans laquelle on comprendra la Trigonométrie rectiligne et la Trigonométrie sphérique.

La troisième aura pour objet l'Algèbre et l'application de l'Algèbre à la Géométrie.

La quatrième comprendra la Statique et le Mouvement, avec quelques propositions d'Hydrostatique et d'Hydraulique.

Nous avons préféré de faire succéder l'Algèbre à la Géométrie plutôt qu'à l'Arithmétique; parce qu'outre que l'Algèbre nous eût été d'une utilité très-médiocre dans la Géométrie élémentaire, les Commençans ne sont d'ailleurs pas encore assez exercés dans les raisonnemens mathématiques, pour sentir la force des démonstrations algébriques, quoique celles-ci soient souvent plus simples que les démonstrations synthétiques; au lieu que dans la disposition que nous avons choisie, on a lieu de croire que les Commençans, déjà fortifiés par l'étude des deux premières Parties, en auront d'autant plus de facilité à généraliser leurs idées, et saisiront mieux les usages nombreux qu'on peut faire de l'Algèbre; d'ailleurs, ayant déjà plus de connaissances acquises, ils seront plus à

portée de se familiariser avec cette science, par un plus grand nombre d'objets auxquels ils pourront l'appliquer.

Nous n'entrerons ici dans aucun détail sur l'exécution des trois dernières parties du Cours ; nous nous bornerons à rendre compte de celle-ci. Elle renferme, sous un volume assez peu considérable, ce qu'il est nécessaire de savoir, non-seulement pour appliquer les connaissances mathématiques que nous enseignerons par la suite, mais encore pour satisfaire à divers autres usages. En exposant les méthodes, nous avons évité de les multiplier pour un même objet, parce qu'on ne peut veiller trop soigneusement à ne pas partager l'attention dans les commencemens; c'est un abus de dire, en faveur de l'opinion contraire, qu'il est utile d'envisager un objet sous différens aspects : cela n'est vrai que lorsqu'on a acquis un certain nombre de connaissances. C'est par ce même principe que nous avons cru devoir resserrer les raisonnemens et les discours dans beaucoup d'endroits ; les Commençans, peu ou point du tout faits à raisonner méthodiquement, perdent en parcourant un long échafaudage de logique, la force de tête qui leur est nécessaire pour saisir l'esprit d'une démonstration.

On a donc fait en sorte de ne donner aux raisonnemens, que l'étendue nécessaire pour être bien entendus, et d'en élaguer ces attentions scrupuleuses qui vont jusqu'à démontrer des axiômes, et qui, à force de supposer le Lecteur inepte, conduisent enfin à le rendre tel.

J'ai tâché d'aplanir la route, soit en simplifiant des raisonnemens déjà employés, soit en leur en substituant de nouveaux qui m'ont paru plus clairs, soit enfin en employant un langage familier et simple. C'est au Public à juger si j'ai réussi; mais on ne doit pas s'attendre que le Lecteur soit dispensé d'un certain degré d'attention : on ne fera jamais un livre de Mathématiques qui puisse être lu comme on lit un livre d'Histoire.

Je ne suppose d'autres connaissances à mon Lecteur, que celle des noms de nombres et quelques autres idées aussi familières, sur lesquelles j'établis les principes de la numération, tant des nombres entiers que des décimales. Je passe de là aux quatre opérations fondamentales, dont je donne le procédé, et dont j'explique la nature et les principes, de manière à en faciliter l'application aux opérations plus composées qui en dépendent. A la suite de ces opérations, j'en indique quelques usages. Les fractions sont traitées à peu près de la même manière.

Les nombres complexes dont le calcul suppose, à la ri-

gueur, la connaissance des fractions, succèdent à celles-ci. Quoique je n'aie pas parlé du Toisé, les règles que j'ai établies ne le renferment pas moins; mais la connaissance de la nature des unités, des facteurs et du produit, appartenant à la Géométrie, j'ai différé pour cette raison, d'en parler, jusqu'à ce temps.

Quoique je ne désapprouve pas qu'on emprunte d'une science, les notions qui peuvent faciliter celle que l'on traite (quelque subordination qu'on ait d'ailleurs coutume de mettre entre ces deux sciences), néanmoins je pense qu'on ne doit prendre ce parti, que lorsqu'il ne s'en offre pas de plus simple. Comme l'Arithmétique m'a paru fournir des ressources suffisantes pour l'explication des opérations de la racine quarrée et de la racine cubique, je n'ai pas été puiser ailleurs que dans les principes mêmes de cette science.

Ce que j'expose des Rapports, Proportions et Progressions, quoique court, me paraît renfermer ce qui nous sera nécessaire pour les trois Parties qui doivent suivre. Cependant, comme nous pouvons, sans nous écarter de la loi que nous nous sommes imposée, revenir sur quelques propriétés des Progressions, que quelques Lecteurs pourraient desirer, nous avertissons que nous les avons réservées pour application de l'Algèbre.

Les Logarithmes sont d'un trop grand usage dans la pratique de la Navigation, pour que nous n'ayons pas dû nous en occuper spécialement. Aussi, après avoir exposé la nature, la formation et ceux des usages de ces nombres que nous pouvions exposer sans anticiper sur aucune autre science, nous avons donné les moyens d'étendre, dans le besoin, les secours qu'on peut tirer des tables ordinaires.

Quoiqu'on puisse faire un grand nombre d'applications de l'Arithmétique à la Navigation, ce n'est cependant pas dans l'Arithmétique même qu'elles peuvent trouver leur place, parce qu'elles supposent presque toutes, au moins la Géométrie. Néanmoins, dans le nombre des applications que nous avons données, nous avons pris quelques exemples dans le métier même. A mesure que nous avancerons, elles deviendront et plus nombreuses et plus importantes : on en trouvera d'ailleurs un très-grand nombre dans le *Traité de Navigation* qui forme la suite de ce Cours.

Nota. Dans le texte de *Bezout* et dans la quatrième Partie des *Notes*, les nombres placés entre parenthèses, indiquent des renvois à ce texte; et dans les trois premières Parties des *Notes*, les numéros placés entre parenthèses, se rapportent aux *Notes*.

TABLE DES MATIÈRES
DE
L'ARITHMÉTIQUE DE BEZOUT.

Nombres entiers et décimaux.

DÉFINITIONS, nos 1...6. Pages 1....2
Numération et *décimales*, nos 7...30. 2....9
Opérations fondamentales de l'Arithmétique, nos 31...32. 9
Addition des nombres entiers et décimaux, nos 33...34. 9...12
Soustraction, nos 35...37. 12...15
Preuves de l'addition et de la soustraction, nos 38...39. 15...16
Multiplication des nombres entiers et décimaux, nos 40...58. 16...28
Division des nombres entiers et décimaux, nos 59...73. 28...43
Preuves de la multiplication et de la division, no 74. 44
Preuves par 9, no 75. 45...46
Usage de la division, no 76. 46...48

FRACTIONS.

Définition et numération des fractions, nos 77...83. 48...49
Entiers considérés sous la forme de fractions, nos 84...86. 50
Changemens qu'on peut faire subir aux deux termes d'une fraction, sans changer sa valeur, nos 87...89. 51
Réduction des fractions au même dénominateur, nos 90...91. 52...53
Réduction des fractions à leur plus simple expression, par la considération des nombres *premiers*, et par la méthode du *plus grand commun diviseur*, nos 92...95. 53...56
Points de vue sous lesquels on peut considérer les fractions, par la conversion des fractions ordinaires en décimales, nos 96...99. 56...57
Calcul des fractions, nos 100...111. 57...61
Application des règles précédentes. Fractions de fractions, nos 112...114. 61...64
Méthode pour exprimer la valeur approchée d'une fraction irréductible, par une fraction plus simple, no 115. 64...65

NOMBRES COMPLEXES.

Numération et addition, nos 116...117. 65...67
Soustraction, no 118. 67...68
Multiplication, nos 119...123. 68...74
Division, nos 124...128. 74...78

PUISSANCES ET RACINES.

Formation des *quarrés*, et extraction de la *racine quarrée*, nos 129...148. 78...89

Formation des *cubes*, et extraction de la *racine cubique*, nos 149...161. Pages 89...98

RAPPORTS, PROPORTIONS ET PROGRESSIONS.

Rapports arithmétiques et géométriques, nos 162...171. 99..100
Proportions, nos 172...175. 100..102
Propriétés des proportions arithmétiques, nos 176...177. 102..103
Propriétés des proportions géométriques, nos 178...192. 103..109
Règle de trois, nos 193...196. 110..116
Règle de société, nos 197...198. 116..119
Règles de *fausse position*, d'*intérêt*, de *change*, d'*escompte*, d'*alliage*, etc., nos 199...203. 119..122
Progressions arithmétiques, nos 204...210. 122..125
Progressions géométriques, nos 211...215. 125..129

THÉORIE DES LOGARITHMES.

Définition et calcul des *logarithmes*, nos 216...221. 129..132
Table de logarithmes. 133
Propriétés des logarithmes, nos 222...226. 134..135
Usage des logarithmes, nos 227...233. 136..138
Nombres dont les logarithmes ne se trouvent pas dans les tables, nos 234...241. 138..142
Logarithmes dont les nombres ne se trouvent pas dans les tables, nos 242...245. 142..144
Application des logarithmes à quelques exemples; usage des *Complémens arithmétiques*, no 246. 144..152

FIN DE LA TABLE DE L'ARITHMÉTIQUE DE BEZOUT.

ARITHMÉTIQUE

A L'USAGE

DE LA MARINE ET DU COMMERCE.

Notions préliminaires sur la nature et les différentes espèces de Nombres.

1. On appelle, en général, *quantité*, tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. L'étendue, la durée, le poids, etc., sont des quantités. Tout ce qui est quantité est de l'objet des Mathématiques; mais l'Arithmétique, qui fait partie de ces sciences, ne considère les quantités qu'en tant qu'elles sont exprimées en nombres.

2. L'Arithmétique est donc la science des nombres : elle en considère la nature et les propriétés; et son but est de donner des moyens aisés, tant pour représenter les nombres que pour les composer et décomposer; ce qu'on appelle *calculer*.

3. Pour se former une idée exacte des nombres, il faut d'abord savoir ce qu'on entend par *unité*.

4. L'unité est une quantité que l'on prend (le plus souvent arbitrairement) pour servir de terme de comparaison à toutes les quantités d'une même espèce : ainsi lorsqu'on dit, un tel corps pèse *cinq* livres, la livre est l'unité, c'est la quantité à laquelle on compare le poids de ce corps; on aurait pu également prendre l'once pour l'unité; et alors le poids de ce corps eût été marqué par quatre-vingts.

5. Le nombre exprime de combien d'unités ou de parties d'unité une quantité est composée.

Si la quantité est composée d'unités entières, le nombre qui l'exprime s'appelle *nombre entier;* et si elle est composée d'unités entières et de parties de l'unité, ou simplement de parties de l'unité, alors le nombre est dit *fractionnaire*, ou *fraction; trois et demi* font un nombre fractionnaire; *trois quarts* est une fraction.

6. Un nombre qu'on énonce sans désigner l'espèce des unités, comme quand on dit simplement *trois* ou *trois fois*, *quatre* ou *quatre fois*, s'appelle un *nombre abstrait;* et lorsqu'on énonce en même temps l'espèce des unités, comme quand on dit *quatre livres*, *cent tonneaux*, on l'appelle *nombre concret.*

Nous définirons les autres espèces de nombres à mesure qu'il en sera question.

De la Numération et des Décimales.

7. La numération est l'art d'exprimer tous les nombres par une quantité limitée de noms et de caractères : ces caractères s'appellent *chiffres.*

Nous nous dispenserons de donner ici le nom des nombres ; c'est une connaissance familière à tout le monde.

Quant à la manière de représenter les nombres par des chiffres, plusieurs raisons nous engagent à en exposer les principes.

8. Les caractères dont on fait usage dans la numération actuelle, et les noms des nombres qu'ils représentent, sont tels qu'on les voit ici.

zéro,	un,	deux,	trois,	quatre,	cinq,	six,	sept,	huit,	neuf.
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9.

Pour exprimer tous les autres nombres avec ces caractères, on est convenu que de dix unités on en ferait une seule, à laquelle on donnerait le nom de *dixaine*, et que l'on compterait par dixaines comme on compte par unités, c'est-à-dire, que l'on compterait deux dixaines, trois dixaines, etc., jusqu'à 9 : que pour représenter ces nouvelles unités, on emploierait les mêmes chiffres que pour les unités simples, mais qu'on les en

distinguerait par la place qu'on leur ferait occuper, en les mettant à la gauche des unités simples.

Ainsi, pour représenter *cinquante-quatre*, qui renferment cinq dixaines et quatre unités, on est convenu d'écrire 54. Pour représenter *soixante*, qui contiennent un nombre exact de dixaines et point d'unités, on écrit 60, en mettant un zéro, qui marque qu'il n'y a point d'unités simples, et détermine le chiffre 6 à marquer un nombre de dixaines. On peut, par ce moyen, compter jusqu'à *quatre-vingt-dix-neuf* inclusivement.

9. Remarquons, en passant, cette propriété de la numération actuelle; savoir, qu'un chiffre placé à la gauche d'un autre, ou suivi d'un zéro, représente un nombre dix fois plus grand que s'il était seul.

10. Depuis 99 on peut compter jusqu'à *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, par une convention semblable. De dix dixaines, on composera une seule unité qu'on nommera *centaine*, parce que dix fois dix font cent; on comptera ces centaines depuis un jusqu'à neuf, et on les représentera par les mêmes chiffres, mais en plaçant ces chiffres à la gauche des dixaines.

Ainsi, pour marquer *huit cent cinquante-neuf*, qui contiennent huit centaines, cinq dixaines et neuf unités, on écrira 859. Si l'on avait *huit cent neuf*, qui contiennent huit centaines, point de dixaines, et neuf unités, on écrirait 809; c'est-à-dire que l'on mettrait un zéro pour tenir la place des dixaines qui manquent. Si les unités manquaient aussi, on mettrait deux zéros : ainsi, pour marquer *huit cents*, on écrirait 800.

11. Remarquons encore qu'en vertu de cette convention, un chiffre suivi de deux autres, ou de deux zéros, marque un nombre cent fois plus grand que s'il était seul.

12. Depuis *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, on peut compter, par le même artifice, jusqu'à *neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, en formant de dix centaines une unité qu'on appelle *mille*, parce que dix fois cent font mille; comptant ces unités comme ci-devant, et les représentant par les mêmes chiffres placés à la gauche des centaines.

Ainsi, pour marquer *sept mille huit cent cinquante-neuf*, on écrira 7859; pour marquer *sept mille neuf*, on écrira 7009, et pour *sept mille*, on écrira 7000, où l'on voit qu'un chiffre suivi de trois autres, ou de trois zéros, marque un nombre mille fois plus grand que s'il était seul.

13. En continuant ainsi de renfermer dix unités d'un certain ordre, dans une seule unité, et de placer ces nouvelles unités dans des rangs de plus en plus avancés vers la gauche, on parvient à exprimer d'une manière uniforme, et avec dix caractères seulement, tous les nombres entiers imaginables.

14. Pour énoncer facilement un nombre exprimé par tant de chiffres qu'on voudra, on le partagera, par la pensée, en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche : on donnera à chaque tranche les noms suivans, en partant de la droite, *unités*, *mille*, *millions*, *billions*, *trillions*, *quatrillions*, *quintillions*, *sextillions*, etc. Le premier chiffre de chaque tranche (en partant toujours de la droite, aura le nom de la tranche, le second celui de dixaines, et le troisième celui de centaines.

Ainsi, en partant de la gauche, on énoncera chaque tranche comme si elle était seule, et l'on prononcera à la fin de chacune le nom de cette même tranche : par exemple, pour énoncer le nombre suivant :

quatrillions,	trillions,	billions,	millions,	mille,	unités.
23	456	789	234	565	456

On dira vingt-trois *quatrillions*, quatre cent cinquante-six *trillions*, sept cent quatre-vingt-neuf *billions*, deux cent trente-quatre *millions*, cinq cent soixante et cinq *mille*, quatre cent cinquante-six *unités*.

15. De la numération que nous venons d'exposer, et qui est purement de convention, il résulte qu'à mesure qu'on avance de droite à gauche, les unités dont chaque nombre est composé, sont de dix en dix fois plus grandes, et que par conséquent, pour rendre un nombre dix fois, cent fois, mille fois plus

grand, il suffit de mettre à la suite du chiffre de ses unités, un, deux, trois, etc. zéros : au contraire, à mesure qu'on rétrograde de gauche à droite, les unités sont de dix en dix fois plus petites.

16. Telle est la numération actuelle : elle est la base de toutes les autres manières de compter, quoique dans plusieurs arts on ne s'assujétisse pas toujours à compter uniquement par dixaines, par dixaines de dixaines, etc.

17. Pour évaluer les quantités plus petites que l'unité qu'on a choisie, on partage celle-ci en d'autres unités plus petites. Le nombre en est indifférent en lui-même, pourvu qu'on puisse mesurer les quantités qu'on a dessein de mesurer; mais ce qu'on doit avoir principalement en vue dans ces sortes de divisions, c'est de rendre les calculs les plus commodes qu'il sera possible; c'est pour cette raison qu'au lieu de partager d'abord l'unité en un grand nombre de parties, afin de pouvoir évaluer les plus petites, on ne la partage d'abord qu'en un certain nombre de parties, et qu'on subdivise celles-ci en d'autres plus petites. C'est ainsi que dans les monnoies on partage la livre en 20 parties qu'on appelle *sous*, le sou en 12 parties que l'on appelle *deniers*. De même, dans les mesures de poids, on partage la livre en 2 *marcs*, le marc en 8 *onces*, l'once en 8 *gros*, etc.; ensorte que dans le premier cas on compte par vingtaines et par douzaines; dans le second, par deuxaines et par huitaines, etc.

18. Un nombre qui est composé de parties rapportées ainsi à différentes unités, est ce qu'on appelle un nombre *complexe*; et par opposition, celui qui ne renferme qu'une seule espèce d'unités, s'appelle *nombre incomplexe*. $8^{\#}$, ou 8 livres, sont un nombre incomplexe. $8^{\#}\ 17^{s}\ 8^{d}$ ou 8 livres 17 sous 8 deniers, sont un nombre complexe.

19. Chaque art subdivise à sa manière l'unité principale qu'il s'est choisie. Les subdivisions de la toise sont différentes de celles de la livre; celles de la livre, différentes de celles du jour, de l'heure; celles-ci différentes de celles du marc; et ainsi

de suite : nous les ferons connaître lorsque nous traiterons des nombres complexes.

20. Mais de toutes les divisions et subdivisions qu'on peut faire de l'unité, celle qui se fait par décimales, c'est-à-dire, en partageant l'unité en parties de dix en dix fois plus petites, est incontestablement la plus commode dans tous les calculs (*). Elle est fort en usage dans la pratique des Mathématiques; la formation et le calcul des décimales sont absolument les mêmes que pour les nombres ordinaires ou entiers : nous allons les faire connaître.

21. Pour évaluer en décimales les parties plus petites que l'unité, on conçoit que cette unité, telle qu'elle soit, livre, toise, etc., est composée de dix parties, comme on imagine la dixaine composée de dix unités simples, ou comme on imagine la livre composée de 20 sous. Ces nouvelles unités, par opposition aux dixaines, sont nommées *dixièmes;* on les représente par les mêmes chiffres que les unités simples; et comme elles sont dix fois plus petites que celles-ci, on les place à la droite du chiffre qui représente les unités simples.

Mais pour prévenir l'équivoque, et ne point donner lieu de prendre ces dixièmes pour des unités simples, on est convenu en même temps de fixer, une fois pour toutes, la place des unités par une marque particulière : celle qui est le plus en usage est une virgule que l'on met à la droite du chiffre qui représente les unités, ou, ce qui est la même chose, entre les unités et les *dixièmes;* ainsi, pour marquer *vingt-quatre unités et trois dixièmes*, on écrira 24,3.

22. On peut, de même, regarder actuellement les *dixièmes* comme des unités qui ont été formées de dix autres, chacune dix fois plus petite que les *dixièmes*, et par la même raison d'analogie, les placer à la droite des *dixièmes*. Ces nouvelles unités, dix fois plus petites que les *dixièmes*, seront cent fois

(*) Telles sont les nouvelles divisions adoptées par le Gouvernement, divisions dont nous donnerons bientôt les dénominations et le calcul.

plus petites que les unités principales ; et pour cette raison, seront nommées *centièmes*. Ainsi pour marquer *vingt-quatre unités, trois dixièmes et cinq centièmes*, on écrira 24,35.

23. Concevons pareillement les *centièmes*, comme formés de dix parties ; ces parties seront mille fois plus petites que l'unité principale, et pour cette raison seront nommées *millièmes ;* et, comme dix fois plus petites que les *centièmes*, on les placera à la droite de celles-ci. En continuant de subdiviser ainsi de dix en dix, on formera de nouvelles unités qu'on nommera successivement des *dix-millièmes, cent-millièmes, millionièmes, dix-millionièmes, cent-millionièmes, billionièmes*, etc. et qu'on placera dans des rangs de plus en plus reculés sur la droite de la virgule.

24. Les parties de l'unité que nous venons de décrire, sont ce que l'on appelle les *décimales*.

25. Quant à la manière de les énoncer, elle est la même que pour les autres nombres. Après avoir énoncé les chiffres qui sont à la gauche de la virgule, on énonce les décimales de la même manière ; mais on ajoute à la fin le nom des unités décimales de la dernière espèce : ainsi, pour énoncer ce nombre, 34, 572, on dirait trente-quatre unités et cinq cent soixante et douze *millièmes ;* si c'étaient des toises, par exemple, on dirait trente-quatre toises et cinq cent soixante et douze *millièmes* de toise.

La raison en est facile à apercevoir, si l'on fait attention que dans le nombre 34, 572, le chiffre 5 peut indifféremment être rendu ou par cinq *dixièmes*, ou par cinq cent *millièmes*, puisque le *dixième* (21) valant dix *centièmes*, et le *centième* (22) valant dix *millièmes*, le *dixième* contiendra dix fois dix *millièmes*, ou cent *millièmes ;* ainsi les cinq *dixièmes* valent cinq cent *millièmes*. Par une raison semblable, le chiffre 7 pourra s'énoncer en disant soixante et dix *millièmes*, puisque (23) chaque *centième* vaut dix *millièmes*.

26. A l'égard de l'espèce des unités du dernier chiffre, on la trouvera toujours facilement en comptant successivement de

gauche à droite sur chaque chiffre depuis la virgule, les noms suivans : *dixièmes*, *centièmes*, *millièmes*, *dix-millièmes*, etc.

27. Si l'on n'avait pas d'unités entières, mais seulement des parties de l'unité, on mettrait un zéro pour tenir la place des unités ; ainsi, pour marquer cent vingt-cinq *millièmes*, on écrirait 0,125. Si l'on voulait marquer 25 *millièmes*, on écrirait 0,025 en mettant un zéro entre la virgule et les autres chiffres, tant pour marquer qu'il n'y a point de *dixièmes*, que pour donner aux parties suivantes leur véritable valeur. Par la même raison, pour marquer six *dix-millièmes*, on écrirait 0,0006.

28. Examinons maintenant les changemens qu'on peut faire naître dans un nombre, par le déplacement de la virgule.

Puisque la virgule détermine la place des unités, et que tous les autres chiffres ont des valeurs dépendantes de leurs distances à cette même virgule, si l'on avance la virgule d'une, deux, trois, etc. places sur la gauche, on rend le nombre 10, 100, 1000, etc. fois plus petit ; et au contraire, on le rend 10, 100, 1000, etc. fois plus grand, si l'on recule la virgule d'une, deux, trois, etc. places sur la droite.

En effet, si l'on a 4327, 5264, et qu'en avançant la virgule d'une place sur la gauche, on écrive 432, 75264, il est visible que les mille du premier nombre sont des centaines dans le nouveau ; les centaines sont des dixaines ; les dixaines, des unités ; les unités, des dixièmes ; les dixièmes, des centièmes ; et ainsi de suite. Donc chaque partie du premier nombre est devenue dix fois plus petite par ce déplacement. Si au contraire, en reculant la virgule d'une place sur la droite, on eût écrit 43275, 264, les mille du premier nombre se trouveraient changés en dixaines de mille, les centaines en mille, les dixaines en centaines, les unités en dixaines, les dixièmes en unités, et ainsi de suite. Donc le nouveau nombre est dix fois plus grand que le premier.

29. Un raisonnement semblable fait voir qu'en avançant sur la gauche, de deux ou de trois places, on rendrait le nombre, cent ou mille fois plus petit, et au contraire, cent ou mille fois

plus grand, en reculant la virgule de deux ou trois places sur sa droite.

30. La dernière observation que nous ferons sur les décimales, est qu'on ne change point la valeur en mettant à la suite du dernier chiffre décimal tel nombre de zéros qu'on voudra. Ainsi 43, 25 est la même chose que 43, 250, ou que 43, 2500, ou que 43, 25000, etc.

Car chaque *centième* valant dix *millièmes* ou cent *dix-millièmes*, etc. les vingt-cinq *centièmes* vaudront deux cent cinquante *millièmes* ou deux mille cinq cent *dix millièmes*, etc. En un mot, c'est la même chose que lorsqu'au lieu de dire 25 pistoles, on dit 250 livres, et que lorsqu'au lieu de dire 25 quintaux, on dit 2500 livres.

Des opérations de l'Arithmétique.

31. Ajouter, soustraire, multiplier et diviser, sont les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique. Toutes les questions qu'on peut proposer sur les nombres, se réduisent à pratiquer quelques-unes de ces opérations, ou toutes ces opérations. Il est donc important de se les rendre familières, et d'en bien saisir l'esprit.

32. Le but de l'Arithmétique est, comme nous l'avons déjà dit, de donner des moyens de calculer facilement les nombres. Ces moyens consistent à réduire le calcul des nombres les plus composés, à celui des nombres plus simples, ou exprimés par le plus petit nombre de chiffres possible. C'est ce qu'il s'agit d'exposer actuellement.

De l'Addition des nombres entiers, et des Parties décimales.

33. Exprimer la valeur totale de plusieurs nombres, par un seul, est ce qu'on appelle *faire une addition*.

Quand les nombres qu'on se propose d'ajouter n'ont qu'un seul chiffre, on n'a pas besoin de règle; mais lorsqu'ils ont plu-

sieurs chiffres, on trouve leur valeur totale qu'on appelle *somme*, en observant la règle suivante.

Ecrivez, les uns sous les autres, tous les nombres proposés, de manière que les chiffres des unités de chacun soient dans une même colonne verticale; qu'il en soit de même des dixaines, de même des centaines, etc. Soulignez le tout.

Ajoutez d'abord tous les nombres qui sont dans la colonne des unités; si la somme ne passe pas 9, écrivez-la au-dessous; si elle surpasse neuf, elle renfermera des dixaines; n'écrivez au-dessous que l'excédant du nombre des dixaines : comptez ces dixaines par autant d'unités, et ajoutez-les avec les nombres de la colonne suivante : observez, à l'égard de la somme des nombres de cette seconde colonne, la même règle qu'à l'égard de la première, et continuez ainsi de colonne en colonne jusqu'à la dernière, au-dessous de laquelle vous écrirez la somme telle que vous la trouverez. Eclaircissons cette règle par des exemples.

EXEMPLE I.

Qu'il soit question d'ajouter 54925 avec 2023 : j'écris ces deux nombres comme on le voit ici.

```
54925
 2023
-----
56948 somme.
```

Et après avoir souligné le tout, je commence par les unités, en disant : 5 et 3 font 8, que j'écris sous cette même colonne.

Je passe à celle des dixaines, dans laquelle je dis : 2 et 2 font 4, que j'écris au-dessous.

A la colonne des centaines, je dis : 9 et 0 font 9, que j'écris sous cette même colonne.

Dans la colonne des mille, je dis : 4 et 2 font 6, que
is sous cette colonne.

fin, dans la colonne des dixaines de mille, je dis : 5 et
nt 5, que j'écris de même au-dessous.

nombre 56948, trouvé par cette opération, est la somme

des deux nombres proposés, puisqu'il en renferme les unités, les dixaines, les centaines, les mille, et les dixaines de mille que nous avons rassemblés successivement.

EXEMPLE II.

On demande la somme des quatre nombres suivans :....6903, 7854, 953, 7327 : je les écris comme on les voit ici.

6903
7854
953
7327
23037 somme.

Et en commençant comme ci-dessus, par la droite, je dis : 3 et 4 font 7, et 3 font 10, et 7 font 17; j'écris les 7 unités sous la première colonne, et je retiens la dixaine pour la joindre, comme unité, aux nombres de la colonne suivante, qui sont aussi des dixaines.

Passant à cette seconde colonne, je dis : un que je retiens et 0 font 1, et 5 font 6, et 5 font 11, et 2 font 13; j'écris 3 sous la colonne actuelle, et je retiens pour la dixaine une unité que j'ajoute à la colonne suivante, en disant : une et 9 font 10, et 8 font 18, et 9 font 27, et 3 font 30; je pose 0 sous cette colonne, et je retiens, pour les trois dixaines, trois unités que j'ajoute à la colonne suivante, en disant pareillement : 3 et 6 font 9, et 7 valent 16, et 7 font 23; j'écris 3 sous cette colonne, et comme il n'y a plus d'autre colonne, j'avance d'une place les deux dixaines qui appartiennent à la colonne suivante, s'il y en avait une. Le nombre 23037 est la somme des quatre nombres proposés.

34. S'il y a des parties décimales, comme elles se comptent, ainsi que les autres nombres, par dixaines, à mesure qu'on avance de droite à gauche, la règle pour les ajouter est absolument la même, en observant de mettre toujours les unités de même ordre dans une même colonne.

Ainsi, si on propose d'ajouter les trois nombres 72,957...12,8...124,03, j'écrirai

72,957
12,8
124,03
209,787 somme.

En suivant la règle ci-dessus, j'aurai 209,787 pour la somme.

De la Soustraction des nombres entiers, et des Parties décimales.

35. La soustraction est l'opération par laquelle on retranche un nombre d'un autre nombre. Le résultat de cette opération s'appelle *reste*, ou *excès*, ou *différence*.

Pour faire cette opération, on écrira le nombre qu'on veut retrancher au-dessous de l'autre, de la même manière que dans l'addition; et ayant souligné le tout, on retranchera, en allant de droite à gauche, chaque nombre inférieur de son correspondant supérieur; c'est-à-dire les unités des unités, les dixaines des dixaines, etc. : on écrira chaque reste au-dessous, dans le même ordre, et zéro lorsqu'il ne restera rien.

Lorsque le chiffre inférieur se trouvera plus grand que le chiffre supérieur correspondant, on ajoutera à celui-ci dix unités qu'on aura, en empruntant, par la pensée, une unité sur son voisin à gauche, lequel doit, par cette raison être regardé comme moindre d'une unité dans l'opération suivante.

EXEMPLE I.

On propose de retrancher 5432 de 8954, j'écris ces deux nombres comme il suit :

8954
5432
3522 reste.

Et en commençant par le chiffre des unités, je dis : 2 ôté de 4, il reste 2, que j'écris au-dessous : puis, passant aux dixaines, je dis : 3 ôté de 5, il reste 2, que j'écris sous les dixaines. A la troi-

ième colonne, je dis : 4 ôté de 9, il reste 5, que j'écris sous cette colonne. Enfin à la quatrième, je dis : 5 ôté de 8, il reste 3, que j'écris sous 5, et j'ai 3522 pour le reste de 5432 retranché de 8954.

EXEMPLE II.

On veut ôter 7987 de 27646

On écrira..... 27646
7987
19659 reste.

Comme on ne peut ôter 7 de 6, on ajoutera à 6 dix unités qu'on empruntera en prenant une unité sur son voisin 4, et on dira : 7 ôté de 16, il restera 9 qu'on écrira sous 7.

Passant aux dixaines, on ne dira plus, 8 ôté de 4, mais 8 ôté de 3 seulement, parce que l'emprunt qu'on a fait a diminué 4 d'une unité : comme on ne peut ôter 8 de 3, on ajoutera de même à 3 dix unités qu'on empruntera, en prenant une unité sur le chiffre 6 de la gauche, et on dira : 8 ôté de 13, il reste 5 qu'on écrira sous 8. Passant à la troisième colonne, on dira de même, 9 ôté de 5, ou plutôt 9 ôté de 15 (en empruntant comme ci-dessus), il reste 6 pour écrire sous 9.

A la quatrième colonne, on dira, par la même raison, 7 ôté de 6, ou plutôt de 16, il reste 9, qu'on écrira sous 7; et comme il n'y a rien à retrancher dans la cinquième colonne, on écrira sous cette colonne, non pas 2, parce qu'on vient d'emprunter une unité sur ce 2, mais seulement 1, et on aura 19659 pour le reste.

36. Si le chiffre sur lequel on doit faire l'emprunt était un zéro, l'emprunt se ferait, non pas sur ce zéro, mais sur le premier chiffre significatif qui viendrait après; or, quoique ce soit alors emprunter 100, ou 1000, ou 10000, selon qu'il y a un, deux ou trois zéros consécutifs, on n'en opérera pas moins comme ci-dessus; c'est-à-dire qu'on ajoutera seulement 10 au chiffre pour lequel on emprunte; et comme ces 10 sont censés

pris sur les 100 ou 1000, etc. qu'on a empruntés, pour employer les 90 ou les 990, etc., qui restent, on comptera les zéros suivans pour autant de 9 ; c'est ce que l'exemple ci-après va éclaircir.

EXEMPLE III.

	99
Si de.....	20064
on veut retrancher.....	17489
	2575 reste.

On dira d'abord : 9 ôté de 4, ou plutôt de 14 (en empruntant sur le chiffre suivant), il reste 5. Puis, pour ôter 8 de 5, comme cela ne se peut, et qu'il n'est pas possible non plus d'emprunter sur le chiffre suivant qui est un zéro, on empruntera sur le 2 une unité, laquelle vaut mille à l'égard du chiffre sur lequel on opère. De ce mille, on ne prendra que dix unités qu'on ajoutera à 5, et on dira : 8 ôté de 15, il reste 7.

Comme on n'a employé que dix unités sur mille qu'on a empruntées, on emploiera les 990 restantes, pour en retrancher les nombres qui répondent au-dessous des zéros ; ce qui revient au même que de compter chaque zéro comme s'il valait 9. Ainsi l'on dira : 4 ôté de 9, reste 5 ; puis 7 ôté de 9, reste 2 ; et enfin 1 ôté de 1, il ne reste rien.

37. S'il y a des parties décimales dans les nombres sur lesquels on veut opérer, on suivra absolument la même règle mais pour éviter tout embarras dans l'application de cette règle il n'y aura qu'à rendre le nombre des chiffres décimaux l même dans chacun des deux nombres proposés, en mettan un nombre suffisant de zéros à la suite de celui qui a le moin de décimales : cette préparation ne change rien à la valeur d ce nombre (30).

EXEMPLE IV.

De.....	5403,25
on veut ôter.....	385,6532

Je mets deux zéros à la suite des décimales du nombre supérieur; après quoi j'opère sur les deux nombres ainsi préparés, précisément selon l'énoncé de la règle donnée pour les nombres entiers.

$$\begin{array}{r} 5403{,}2500 \\ 385{,}6532 \\ \hline 5017{,}5968 \end{array}$$

De la preuve de l'Addition et de la Soustraction.

38. Ce qu'on appelle preuve d'une opération arithmétique est une autre opération que l'on fait pour s'assurer de l'exactitude du résultat de la première.

La preuve de l'addition se fait en ajoutant de nouveau, par parties, mais en commençant par la gauche, les sommes qu'on a déjà ajoutées. On retranche la totalité de la première colonne, de la partie qui lui répond dans la somme inférieure; on écrit au-dessous le reste, qu'on réduit, par la pensée, en dixaines, pour le joindre au chiffre suivant de cette même somme, et du total on retranche encore la totalité de la colonne supérieure; on continue ainsi jusqu'à la dernière colonne, dont la totalité étant retranchée ne doit laisser aucun reste.

Ayant trouvé ci-dessus que les quatre nombres

$$\begin{array}{rr} & 6903 \\ & 7854 \\ & 953 \\ & 7327 \\ \hline \text{ont pour somme.....} & 23037 \\ & \cancel{3}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{0} \end{array}$$

Pour vérifier ce résultat j'ajoute les mêmes nombres en commençant par la gauche, et je dis : 6 et 7 font 13, et 7 font 20, lesquels ôtés de 23, il reste 3 ou 3 dixaines, qui; avec le chiffre suivant zéro, font 30. Je passe à la seconde colonne, et je dis : 9 et 8 font 17, et 9 font 26, et 3 font 29, que j'ôte de 30; il reste 1 ou une dixaine qui, jointe au chiffre sui-

vant 3, fait 13. J'ajoute tous les nombres de la troisième colonne, en disant : 5 et 5 font 10, et 2 font 12, qui, ôtés de 13, il reste 1 ou une dixaine, laquelle ajoutée au chiffre suivant 7, fait 17; j'ajoute pareillement tous les nombres de la dernière colonne, en disant : 3 et 4 font 7, et 3 font 10, et 7 font 17, qui, ôtés de 17, il ne reste rien : d'où je conclus que la première opération est exacte.

On est fondé à conclure que la première opération a été bien faite, lorsqu'après cette preuve il ne reste rien, parce qu'ayant ôté successivement tous les mille, toutes les centaines, toutes les dixaines, et toutes les unités, dont on avait composé a somme, il faut qu'à la fin il ne reste rien.

39. La preuve de la soustraction se fait en ajoutant le reste trouvé par l'opération, avec le nombre retranché : si la première opération a été bien faite, on doit reproduire le nombre dont on a retranché : ainsi que je vois dans le troisième exemple que nous avons donné ci-dessus, l'opération a été bien faite, parce qu'en ajoutant 17489 (nombre retranché) avec le reste 2575 je reproduis 20064, nombre dont on a retranché.

de.....	20064
ôtez	17489
reste....	2575
preuve..	20064

De la Multiplication.

40. Multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le premier de ces deux nombres autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre. Multiplier 4 par 3, c'est prendre trois fois le nombre 4.

41. Le nombre qu'on doit multiplier s'appelle le *multiplicande ;* celui par lequel on doit multiplier s'appelle le *multiplicateur ;* et le résultat de l'opération s'appelle *produit.*

42. Le mot *produit* a communément une acception beaucoup plus étendue; mais nous avertissons expressément que nous

nous ne l'emploierons que pour désigner le résultat de la multiplication.

Le multiplicande et le multiplicateur se nomment aussi les *facteurs* du produit : ainsi 3 et 4 sont les facteurs de 12, parce que 3 fois 4 font 12.

43. Suivant l'idée que nous venons de donner de la multiplication, on voit qu'on pourrait faire cette opération en écrivant le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, et faisant ensuite l'addition. Par exemple, pour multiplier 7 par 3, on pourrait écrire

$$\begin{array}{r} 7 \\ 7 \\ \underline{7} \\ 21 \end{array}$$

Et la somme 21 résultante de cette addition, serait le produit.

Mais lorsque le multiplicateur est tant soit peu considérable, l'opération devient fort longue. Ce que nous appelons proprement *multiplication*, est la méthode de parvenir à ce même résultat par une voie plus courte.

44. Tant qu'on ne considère les nombres que d'une manière abstraite, c'est-à-dire sans faire attention à la nature de leurs unités, il importe peu lequel des deux nombres proposés pour la multiplication on prenne pour multiplicande ou pour multiplicateur. Par exemple, si on a 4 à multiplier par 3, il est indifférent de multiplier 4 par 3, ou 3 par 4; le produit sera toujours 12. En effet 3 fois 4 ne sont autre chose que le triple de 1 fois 4 et 4 fois 3 sont le triple de 4 fois 1. Or il est évident que 1 fois 4 et 4 fois 1 sont la même chose; et on peut appliquer le même raisonnement à tout autre nombre.

45. Mais lorsque, par l'énoncé de la question, le multiplicateur et le multiplicande sont des nombres concrets, il importe de distinguer le multiplicande du multiplicateur : cette

attention est principalement nécessaire dans la multiplicatio des nombres complexes, dont nous parlerons par la suite.

Au reste, cela est toujours aisé à distinguer : la question q conduit à la multiplication dont il s'agit, fait toujours connaît quelle est la quantité qu'il s'agit de répéter plusieurs foi c'est-à-dire, le multiplicande, et quelle est celle qui marq combien de fois on doit répéter le multiplicande, c'est-à-di quel est le multiplicateur.

46. Comme le multiplicateur est destiné à marquer co bien de fois on doit prendre le multiplicande, il est toujo un nombre abstrait : ainsi quand on demande ce que doive coûter 52 toises de bois, à raison de 36 livres la toise, on v que le multiplicande est 36 livres, qu'il s'agit de répéter 52 foi soit que ce 52 marque des toises, ou toute autre chose.

47. Le produit qui est formé de l'addition répétée du mu tiplicande, aura donc des unités de même nature que le mu tiplicande (*).

Après cette petite digression sur la nature des unités produit et de ses facteurs, revenons à la méthode pour trouv ce produit.

48. Les règles de la multiplication des nombres les pl composés, se réduisent à multiplier un nombre d'un seul chif par un nombre d'un seul chiffre. Il faut donc s'exercer à tro ver soi-même le produit des nombres exprimés par un se chiffre, en ajoutant successivement un même nombre à lui-mêm On peut aussi, si on le veut, faire usage de la table suivant qu'on attribue à *Pythagore*.

(*) Nous n'en exceptons pas même la multiplication géométrique, nous ne parlerons qu'en Géométrie, comme cela nous paraît assez nat Les unités du multiplicateur ne sont jamais que des unités abstraites, co dans toute autre multiplication.

Table de Multiplication.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La première bande de cette table se forme en ajoutant 1 à lui-même successivement.

La seconde en ajoutant 2 de même.

La troisième en ajoutant 3, et ainsi de suite.

49. Pour trouver, par le moyen de cette table, le produit de deux nombres exprimés par un seul chiffre chacun, on cherchera l'un de ces deux nombres, le multiplicande, par exemple, dans la bande supérieure; et en partant de ce nombre, on descendra verticalement jusqu'à ce qu'on soit vis-à-vis du multiplicateur qu'on trouvera dans la première colonne. Le nombre sur lequel on se sera arrêté, sera le produit. Ainsi pour trouver, par exemple, le produit de 9 par 6, ou combien font 6 fois 9, je descends depuis 9, pris dans la première bande, jusque vis-à-vis le 6 pris dans la première colonne; le nombre sur lequel je m'arrête est 54; par conséquent 6 fois 9 font 54.

En voilà autant qu'il en faut pour passer à la multiplication des nombres exprimés par plusieurs chiffres.

De la Multiplication par un nombre d'un seu chiffre.

50. Écrivez le multiplicateur, qu'on suppose ici d'un s chiffre, sous le multiplicande, peu importe sous quel chiff mais pour fixer les idées, supposons que ce soit sous le chi des unités.

Multipliez d'abord le nombre des unités par votre multi cateur, et si le produit ne contient que des unités, écrivez produit au-dessous; s'il contient des unités et des dixain écrivez seulement les unités, et comptant les dixaines p autant d'unités, retenez celles-ci.

Multipliez, de même, le nombre des dixaines du multi cande, et au produit ajoutez les unités que vous avez retenu écrivez le tout au-dessous, s'il peut être marqué par un s chiffre, sinon n'écrivez que les unités de ce produit, et rete en les dixaines, qui sont des centaines, pour les ajouter produit suivant qui sera pareillement des centaines.

Continuez de multiplier successivement, suivant la m règle, tous les chiffres du multiplicande; la suite des chif que vous aurez écrits, marquera le produit.

EXEMPLE.

On demande combien 2864 toises valent de pieds? La t est de 6 pieds. La question se réduit à prendre 2864 pie fois.

J'écris donc..... 2864 multiplicande.
6 multiplicateur.
17184 produit.

Et je dis, en commençant par les unités, 6 fois 4 font j'écris 4 et je retiens deux unités pour les deux dixaines.

2°. 6 fois 6 font 36, et 2 que j'ai retenues font 38; je 8 et retiens 3.

3°. 6 fois 8 font 48, et 3 que j'ai retenues font 51; je pose 1 et je retiens 5.

4°. 6 fois 2 font 12, et 5 que j'ai retenues font 17, que j'écris en entier, parce qu'il n'y a plus rien à multiplier. Le nombre 17184 est le produit demandé, ou le nombre de pieds que valent les 2864 toises, puisqu'il renferme 6 fois les 4 unités, 6 fois les 6 dixaines, 6 fois les 8 centaines, et 6 fois les 2 mille, et par conséquent 6 fois le nombre 2864.

De la Multiplication par un nombre de plusieurs chiffres.

51. Lorsque le multiplicateur a plusieurs chiffres, il faut faire successivement, avec chacun de ces chiffres, ce que l'on vient de prescrire lorsqu'il n'y en a qu'un, mais en commençant toujours par la droite. Ainsi on multipliera d'abord tous les chiffres du multiplicande par le chiffre des unités du multiplicateur, puis par celui des dixaines, et l'on écrira ce second produit sous le premier; mais comme il doit être un nombre de dixaines, puisque c'est par des dixaines qu'on multiplie, on portera le premier chiffre de ce produit sous les dixaines; et les autres chiffres, toujours en avançant sur la gauche.

Le troisième produit, qui se fera en multipliant par les centaines, se placera de même sous le second, mais en avançant encore d'une place : on suivra la même loi pour les autres.

Toutes ces multiplications étant faites, on ajoutera les produits particuliers qu'elles ont donnés, et la somme sera le produit total.

EXEMPLE.

On propose de multiplier	65487
par.....	6958
	523896
	327435
	589383
	392922
	455658346 produit.

Je multiplie d'abord 65487 par le nombre 8 des unités du multiplicateur, et j'écris successivement sous la barre des chiffres du produit 523896 que je trouve en suivant la règle donnée pour le premier cas (50).

Je multiplie de même le nombre 65487 par le second chiffre 5 du multiplicateur, et j'écris le produit 327435 sous le premier produit, mais en plaçant le premier chiffre 5 sous les dixaines de ce premier produit.

Multipliant pareillement 65487 par le troisième chiffre 9, j'écris le produit 589383 sous le précédent, mais en plaçant le premier chiffre 3 au rang des centaines, parce que le nombre par lequel je multiplie est un nombre de centaines.

Enfin je multiplie 65487 par le dernier chiffre 6 du multiplicateur, et j'écris le produit 392922 sous le précédent, en avançant encore d'une place, afin que son premier chiffre occupe la place des mille, parce que le chiffre par lequel on multiplie marque des mille. Enfin j'ajoute tous ces produits, et j'ai 455658546 pour le produit de 65487 multipliés par 6958, c'est-à-dire pour la valeur de 65487 pris 6958 fois. En effet, on a pris 65487, 8 fois par la première opération, 50 fois par la seconde, 900 fois par la troisième, et 6000 fois par la quatrième.

52. Si le multiplicande ou le multiplicateur, ou tous les deux étaient terminés par des zéros, on abrégerait l'opération, en multipliant comme si ces zéros n'y étaient point; mais on les mettrait ensuite tous à la suite du produit.

EXEMPLE.

On propose de multiplier	6500
par.....	350
	325
	195
	2275000

Je multiplie seulement 65 par 33, et je trouve 2275, à côté

duquel j'écris les trois zéros qui se trouvent, en tout, à la suite du multiplicande et du multiplicateur.

En effet le multiplicande 6500 représente 65 centaines : ainsi quand on multiplie 65, on doit sous-entendre que le produit est des centaines. Pareillement, le multiplicateur 350 marque 35 dixaines. Ainsi quand on multiplie par 35, on doit sous-entendre que le produit sera des dixaines ; il sera donc des dixaines de centaines, c'est-à-dire des mille ; il doit donc avoir 3 zéros. On appliquera un raisonnement semblable à tous les cas.

53. Lorsqu'il se trouve des zéros entre les chiffres du multiplicateur, comme la multiplication par ces zéros ne donnerait que des zéros, on se dispensera d'écrire ceux-ci dans le produit ; et passant tout de suite à la multiplication par le premier chiffre significatif qui vient après ces zéros, on en avancera le produit sur la gauche d'autant de places plus une, qu'il y a de zéros qui se suivent dans le multiplicateur ; c'est-à-dire de deux places s'il y a un zéro, de trois s'il y en a deux.

EXEMPLE.

Si l'on a.....	42052
à multiplier par.....	3006
	252312
	126156.
	126408312.

Après avoir multiplié par 6, et écrit le produit 252312, on multipliera tout de suite par 3 ; mais on écrira le produit 126156, de manière qu'il marque des mille ; il faudra donc le reculer de trois places, c'est-à-dire d'une place de plus qu'il n'y a de zéros interposés aux chiffres du multiplicateur.

De la Multiplication des Parties décimales.

54. Pour multiplier les parties décimales, on observera la même règle que pour les nombres entiers, sans faire aucune attention à la virgule ; mais après avoir trouvé le produit, on

en séparera sur la droite, par une virgule, autant de chiffres qu'il y a de décimales, tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.

EXEMPLE I.

On propose de multiplier...	54,23
par.....	8,3
	16269
	43384
	450,109

Je multiplierai 5423 par 83, le produit sera 450109; et comme il y a deux décimales dans le multiplicande, et une dans le multiplicateur, je séparerai trois chiffres sur la droite de ce produit, qui par là deviendra 450,109, tel qu'il doit être.

La raison de cette règle est facile à saisir, en observant que si le multiplicateur était 83, le produit n'aurait en décimales que des *centièmes*, puisqu'on aurait répété 83 fois le multiplicande 54,23 dont les décimales sont des centièmes; mais comme le multiplicateur est 8,3, c'est-à-dire (21) dix fois plus petit que 83, le produit doit donc avoir des unités dix fois plus petites que les centièmes; le dernier chiffre de ces décimales doit donc (23) être des *millièmes;* il doit donc y avoir trois chiffres décimaux dans ce produit, c'est-à-dire autant qu'il y en a, tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.

On peut appliquer un raisonnement semblable à tout autre cas.

EXEMPLE II.

Si on avait.....	0,12
à multiplier par.....	0,3
	0,036.

On multiplierait 12 par 3, ce qui donnerait 36. Comme la règle prescrit de séparer ici trois chiffres, on pourrait être embarrassé à y satisfaire, puisque ce produit 36 n'en a que deux; mais si on reprend le raisonnement que nous avons appliqué à l'exemple précédent, on verra facilement qu'il faut, comme

on le voit ici, interposer un zéro entre 36 et la virgule. En effet, si l'on avait 0,12 à multiplier par 3, il est évident qu'on aurait 0,36; mais comme on n'a à multiplier que par 0,3, c'est-à-dire par un nombre dix fois plus petit que 3, on doit avoir un produit dix fois plus petit que 0,36, c'est-à-dire des millièmes, et c'est ce qui a eu lieu (28) lorsqu'on écrit 0,036.

55. Comme on n'emploie ordinairement les décimales que dans la vue de faciliter les calculs, en substituant à un calcul rigoureux une approximation suffisante, mais prompte, il n'est pas inutile d'exposer ici un moyen d'abréger l'opération, lorsqu'on n'a besoin d'avoir le produit que jusqu'à un degré d'exactitude proposé.

Supposons, par exemple, qu'ayant à multiplier 45,625957 par 28,635, je n'aie besoin d'avoir le produit qu'à moins d'un millième près. J'écris ces deux nombres comme on le voit ci-dessous, c'est-à-dire, qu'après avoir renversé l'ordre des chiffres de l'un des deux, je l'écris sous l'autre, en faisant répondre le chiffre 8 de ses unités sous la décimale immédiatement inférieure de deux degrés à celui auquel je veux borner mon produit. Je fais ensuite la multiplication, en négligeant, dans le multiplicande, tous les chiffres qui se trouvent à la droite de celui par lequel je multiplie; et à mesure que je change de chiffre dans le multiplicateur, je porte toujours le premier chiffre du nouveau produit sous le premier chiffre du premier. L'addition de tous ces produits étant faite, je supprime les deux derniers chiffres, en observant cependant d'augmenter le dernier de ceux qui restent, d'une unité, si les deux que je supprime passent 50; après quoi je place la virgule au rang fixé par l'espèce de décimale que je me proposais d'avoir.

EXEMPLE.

Je veux multiplier..... 45,625957
par..... 28,636
mais je n'ai besoin d'avoir le produit qu'à un millième d'unité près.

J'écris ainsi ces deux nombres. 45,625957
53682

91,2519 14
36,500760
2737554
136875
22810

1306499 13
produit..... 1306,499

Et si l'on avait fait la multiplication à l'ordinaire, on aurait eu..... 1306,499278695, qui s'accorde avec le précédent jusqu'à la troisième male, ainsi qu'on le demande.

S'il n'y avait pas assez de chiffres décimaux dans le multiplicande, faire correspondre le chiffre des unités du multiplicateur au chiffre auq règle prescrit de le faire correspondre, on y suppléerait en mettant des z

EXEMPLE.

On doit multiplier..... 54,236
par..... 532,27

et l'on veut avoir le produit à un centième d'unité près.

J'écris..... 54,236000
72235

271 180000
16 270800
1 084720
108472
37961

28868196~~7~~

produit..... 28868,20 en ajoutant une unité au d chiffre, parce que les deux que l'on supprime passent 50.

Pour troisième exemple, supposons qu'on ait à multiplier

0,227538917
par..... 0,5664178

et l'on ne veut avoir que 7 décimales au produit, on écrira

0,227538917
8714665o.

.....o.
113769455
13652334
1365228
91012
2275
1589
176

12888206~~9~~

produit..... 0,1288821

Sur quelques usages de la Multiplication.

56. Nous ne nous proposons pas de faire connaître tous les usages que l'on peut faire de la multiplication, nous en indiquerons seulement quelques-uns qui mettront sur la voie pour les autres.

La multiplication sert à trouver, en général, la valeur totale de plusieurs unités, lorsqu'on connaît la valeur de chacune. Par exemple, 1°. combien doivent coûter 5842 toises, à raison de $54^{\#}$ la toise? Il faut multiplier $54^{\#}$ par 5842, ou (44) $5842^{\#}$ par 54 : on aura $315468^{\#}$ pour le prix total demandé. 2°. Combien 5954 pieds cubes (*) d'eau pèsent-ils, en supposant que le pied cube pèse 72℔? Il faut multiplier 72℔ par 5954, ou 5954℔ par 72 : on aura 428688℔ pour le poids de 5954 pieds cubes.

57. On emploie la multiplication pour convertir les unités d'une certaine espèce en unités d'une espèce plus petite. Par exemple, pour réduire les livres en sous, et ceux-ci en deniers; les toises en pieds, ceux-ci en pouces, ces derniers en lignes; les jours en heures, celles-ci en minutes, ces dernières en secondes : on a souvent besoin de ces sortes de conversions. Nous en donnerons quelques exemples.

Si on demande de convertir $8^{\#}\ 17^{s}\ 7^{d}$ en deniers; comme la livre vaut 20^{s}, on multipliera les $8^{\#}$ par 20 (52); ce qui donnera 160^{s} auxquels joignant les 17^{s}, on aura 177^{s} qu'on multipliera par 12, parce que chaque sou vaut 12 deniers; et on aura 2124 deniers, lesquels, joints aux 7 deniers, donnent 2131 deniers pour la valeur des $8^{\#}\ 17^{s}\ 7^{d}$ convertis en deniers.

Si l'on demande combien une année commune, ou 365 jours 5 heures, 48 minutes, ou $365^{j}\ 5^{h}\ 48^{m}$ valent de minutes; comme le jour est de 24 heures, on multipliera 24^{h} par 365, et au

(*) Le pied cube est une mesure d'un pied de long sur un pied de large et sur un pied de haut avec laquelle on évalue la capacité des corps, ainsi qu'on le verra en Géométrie.

produit 8760^h on ajoutera 5^h; on multipliera le total 8765 par 60 (52), parce que l'heure contient 60 minutes, et on aura 525900 minutes, auxquelles ajoutant 48 minutes, on aura 525948 pour le nombre de minutes contenues dans une année commune.

Cette conversion des parties du temps est utile dans quelques opérations du *pilotage*.

58. L'abréviation dont nous avons parlé (52) peut être employée pour réduire promptement en livres un certain nombre de *tonneaux*. Comme le tonneau de poids pèse 2000 livres, si l'on a, par exemple, 854 tonneaux, il n'y a qu'à doubler 854, et mettre les trois zéros à la suite du produit; on aura 1708000 pour le nombre de livres que pèsent 854 tonneaux.

Avant de terminer ce qui regarde la multiplication, faisons observer aux commençans, que ces expressions *doubler*, *tripler*, *quadrupler*, etc. signifient la même chose que multiplier par 2, par 3, par 4, etc.

De la Division des Nombres entiers, et des Parties décimales.

59. Diviser un nombre par un autre, c'est, en général, chercher combien de fois le premier de ces deux nombres contient le second.

Le nombre qu'on doit diviser s'appelle *dividende;* celui par lequel on doit diviser, *diviseur;* et celui qui marque combien de fois le dividende contient le diviseur, s'appelle *quotient.*

On n'a pas toujours pour but dans la division, de savoir combien de fois un nombre en contient un autre; mais on fait l'opération, dans tous les cas, comme si elle tendait à ce but; c'est pourquoi on peut, dans tous les cas, la considérer comme l'opération par laquelle on trouve combien de fois le dividende contient le diviseur.

Il suit de là, que si on multiplie le diviseur par le quotient, on doit reproduire le dividende, puisque c'est prendre ce diviseur autant de fois qu'il est dans le dividende : cela est général,

soit que le quotient soit un nombre entier, soit qu'il soit un nombre fractionnaire.

Quant à l'espèce des unités du quotient, ce n'est ni par l'espèce de celles du dividende, ni par l'espèce de celles du diviseur, ni par l'une et l'autre qu'il faut en juger; car le dividende et le diviseur restant les mêmes, le quotient, qui sera aussi toujours le même numériquement, peut être fort différent pour la nature de ses unités, selon la question qui donne lieu à cette division.

Par exemple, s'il est question de savoir combien 8# contiennent 4#, le quotient sera un nombre abstrait qui marquera 2 fois; mais s'il est question de savoir combien pour 8# on fera faire d'ouvrage à raison de 4# la toise, le quotient sera 2 toises, qui est un nombre concret, et dont l'espèce n'a aucun rapport avec le dividende ni avec le diviseur.

Mais on voit, en même temps, que la question seule qui conduit à faire la division dont il s'agit, décide la nature des unités du quotient.

De la Division d'un nombre composé de plusieurs chiffres, par un nombre qui n'en a qu'un.

60. L'opération que nous allons décrire suppose qu'on sache trouver combien de fois un nombre d'un ou de deux chiffres contient un nombre d'un seul chiffre. C'est une connaissance déjà acquise, quand on sait de mémoire les produits des nombres qui n'ont qu'un chiffre. On peut aussi, pour y parvenir, faire usage de la table que nous avons donnée ci-dessus (48). Par exemple, si je veux savoir combien de fois 74 contient 9, je cherche le diviseur 9 dans la bande supérieure, et je descends verticalement jusqu'à ce que je rencontre le nombre le plus approchant de 74 : c'est ici 72 ; alors le nombre 8 qui se trouve vis-à-vis 72, dans la première colonne, est le nombre de fois, ou le quotient que je cherche.

Cela supposé, voici comment se fait la division d'un nombre qui a plusieurs chiffres, par un nombre qui n'en a qu'un.

Écrivez le diviseur à côté du dividende, séparez l'un de

l'autre par un trait, et soulignez le diviseur sous lequel vous écrivez les chiffres du quotient, à mesure que vous les trouverez.

Prenez le premier chiffre sur la gauche du dividende, ou les deux premiers chiffres, si le premier ne contient pas le diviseur.

Cherchez combien de fois ce premier ou ces deux premiers chiffres contiennent le diviseur, écrivez ce nombre de fois sous le diviseur.

Multipliez le diviseur par le quotient que vous venez d'écrire, et portez le produit sous la partie du dividende que vous venez d'employer.

Enfin retranchez le produit de la partie supérieure du dividende à laquelle il reprend, et vous aurez un reste.

A côté de ce reste abaissez le chiffre suivant du dividende principal, et vous aurez un second dividende partiel, sur lequel vous opérerez comme sur le premier, plaçant le quotient à droite de celui qu'on a déjà trouvé, multipliant de même le diviseur par ce quotient, écrivant et retranchant le produit comme ci-devant.

Vous abaisserez de même, à côté du reste de cette division, le chiffre du dividende qui suit celui que vous avez descendu, et vous continuerez toujours de la même manière jusqu'au dernier inclusivement.

Cette règle va être éclaircie par l'exemple suivant.

EXEMPLE.

On propose de diviser 8769 par 7.

J'écris ces deux nombres comme on les voit ci-après.

dividende 8769	7 diviseur
7	
17	1252 $\frac{5}{7}$ quotient
14	
36	
35	
19	
14	
5	

Et commençant par la gauche du dividende, je devrais dire, en 8 mille combien de fois 7; mais je dis simplement, en 8 combien de fois 7? Il y est une fois. Cet 1 est naturellement mille; mais les chiffres qui viendront après, lui donneront sa véritable valeur; c'est pourquoi j'écris simplement 1 sous le diviseur.

Je multiplie le diviseur 7 par le quotient 1, et je porte le produit 7 sous la partie 8 que je viens de diviser; faisant la soustraction, j'ai pour reste 1.

Ce reste 1 est la partie de 8 qui n'a pas été divisée, et est une dixaine à l'égard du chiffre suivant 7; c'est pourquoi j'abaisse ce même chiffre 7 à côté, et je continue l'opération, en disant, en 17 combien de fois 7? 2 fois. J'écris ce 2 à la droite du premier quotient 1 qu'a donné la première opération.

Je multiplie, comme dans la première opération, le diviseur 7 par le quotient 2 que je viens de trouver; je porte le produit 14 sous mon dividende partiel 17, et faisant la soustraction, il me reste 3 pour la partie qui n'a pas pu être divisée.

A côté de ce reste 3, j'abaisse 6, troisième chiffre du dividende, et je dis, en 36 combien de fois 7? 5 fois; j'écris 5 au quotient.

Je multiplie le diviseur 7 par 5; et ayant écrit le produit 35 sous mon nouveau dividende partiel, je l'en retranche, et il me reste 1.

Enfin, à côté de ce reste 1, j'abaisse le chiffre 9 du dividende, et je dis, en 19 combien de fois 7? 2 fois; j'écris 2 au quotient.

Je multiplie le diviseur 7, par ce nouveau quotient 2, et ayant écrit le produit 14 sous mon dernier dividende partiel 19, j'ai pour reste 5.

Je trouve donc que 8769 contiennent 7 autant de fois que le marque le quotient que nous avons écrit, c'est-à-dire 1252 fois, et qu'il reste 5.

A l'égard de ce reste, nous nous contenterons, pour le présent, de dire qu'on l'écrit à côté du quotient, comme on le voit dans cet exemple, c'est-à-dire en écrivant le diviseur au-dessous de ce reste, et séparant l'un de l'autre par un trait; et alors on

parce qu'ils contiennent le diviseur, et au lieu de dire en combien de fois 53, je cherche seulement combien les se dixaines de 75 contiennent les cinq dixaines de 53, c'est-à-di combien 7 contient 5; je trouve une fois, que j'écris au quotie

Je multiplie 53 par 1, et je porte le produit 53 sous 75 : soustraction faite, il reste 22, à côté duquel j'abaisse le chiffr du dividende, et je poursuis, en disant, pour plus de facilit en 22 combien de fois 5 (au lieu de dire en 223 combien fois 53); je trouve 4 fois, que j'écris au quotient.

Je multiplie successivement par 4 les deux chiffres du di seur, et je porte le produit 212, sous mon dividende partiel 22 la soustraction faite, j'ai pour reste 11; j'abaisse à côté de reste, le chiffre 4 du dividende, et je dis simplement comm ci-dessus, en 11 combien de fois 5? 2 fois; je l'écris au quotien et je multiplie 53 par 2, ce qui me donne 106 que j'écris sous dividende partiel 114; faisant la soustraction, j'ai pour reste à côté duquel j'abaisse le dernier chiffre 7; je divise de mên 87, et continuant comme ci-dessus, je trouve 1 pour quotien et 34 pour reste, que j'écris à côté du quotient de la maniè qui a été indiquée plus haut (60).

63. On devrait, à la rigueur, chercher combien de fois chaq dividende partiel contient le diviseur entier; mais cette reche che serait souvent longue et pénible; on se contente, comme o vient de le voir, de chercher combien la partie la plus forte d ce dividende contient la partie la plus forte du diviseur. L quotient qu'on trouve par cette voie n'est pas toujours le vér table; parce qu'en prenant ce parti, on ne fait réellement qu'u estimation approchée; mais outre que cette estimation met pre que toujours sur le but, et que dans les cas où elle n'y m pas, elle en écarte peu, la multiplication qui vient ensuite se à redresser ce qu'il peut y avoir de défectueux dans ce jug ment. En effet, si le dividende partiel contenait réellement diviseur 3 fois, par exemple, et que par l'essai qu'on fait, eût trouvé qu'il le contient 4 fois, il est facile de voir qu'en fa sant la multiplication par 4, on aurait un produit plus grand q

le dividende, puisqu'on prendrait le diviseur plus de fois qu'il n'est réellement dans ce dividende, et par conséquent la soustraction deviendra impossible; alors on diminuera le quotient successivement d'une, deux, etc. unités, jusqu'à ce qu'on trouve un produit qu'on puisse retrancher : au contraire, si l'on n'avait mis que 2 au quotient, le reste de la soustraction se trouverait plus grand que le diviseur; ce qui prouverait que le diviseur y est encore contenu, et que par conséquent le quotient est trop faible.

Au reste, on acquiert en peu de temps l'usage de prévoir de combien on doit diminuer ou augmenter le quotient que donne la première épreuve.

EXEMPLE II.

On propose de diviser 189492 par 375.

189492	375
1875	
1992	$505\frac{117}{375}$
1875	
117	

Je prends les quatre premiers chiffres du dividende, parce que les trois premiers ne contiennent pas le diviseur.

Je dis ensuite, en 18 seulement combien de fois trois? il y est réellement 6 fois; mais en multipliant 375 par 6, j'aurais plus que mon dividende 1894; c'est pourquoi j'écris seulement 5 au quotient. Je multiplie 375 par 5; et après avoir écrit le produit sous 1894, je fais la soustraction, et j'ai pour reste 19.

J'abaisse à côté de 19 le chiffre 9 du dividende; et comme 199 que j'ai alors ne contient pas 375, je pose 0 au quotient, et j'abaisse à côté de 199 le chiffre 2 du dividende, ce qui me donne 1992 pour lequel je dis, en 19 seulement combien de fois 3? 6 fois. Mais par la même raison que ci-dessus, je n'écris au quotient que 5; et après avoir opéré comme ci-devant, j'ai pour reste 117.

64. Voici une réflexion qui peut servir à éviter, dans un grand nombre de cas, les tentatives inutiles. On est principalement exposé à ces essais douteux, lorsque le second chiffre du diviseur est sensiblement plus grand que le premier. Dans ce cas, au lieu de chercher combien le premier chiffre du diviseur est contenu dans la partie correspondante du dividende, il faut chercher combien ce premier chiffre augmenté d'une unité, se trouve contenu dans la partie correspondante du dividende: cette épreuve sera toujours beaucoup plus approchante que la première.

EXEMPLE.

On propose de diviser 1832 par 288.

$$\begin{array}{r|l} 1832 & 288 \\ \cline{2-2} 1728 & 6\ \frac{104}{288} \\ \cline{1-1} 104 & \end{array}$$

Au lieu de dire, en 18 combien de fois 2, je dirai, en 18 combien de fois 3, parce que le diviseur 288 approche beaucoup plus de 300 que de 200; je trouve 6, qui est le véritable quotient; au lieu que j'aurais trouvé 9, et j'aurais par conséquent été obligé de faire trois essais inutiles.

Moyens d'abréger la Méthode précédente.

65. C'est pour rendre la méthode plus facile à saisir, que nous avons prescrit d'écrire sous chaque dividende partiel, le produit qu'on trouve en multipliant le diviseur par le quotient; mais comme le but de l'Arithmétique doit être d'abréger les opérations, nous croyons devoir faire remarquer qu'on peut se dispenser d'écrire ces produits, et faire la soustraction à mesure qu'on a multiplié chaque chiffre du diviseur. L'exemple suivant suffira pour faire entendre comment se fait cette soustraction.

EXEMPLE.

On veut diviser 756984 par 932.

756984	932
1138	
2064	812 $\frac{200}{932}$
200	

Après avoir pris les quatre premiers chiffres du dividende, qui sont nécessaires pour contenir le diviseur, je trouve que 75 contient 9, 8 fois, c'est pourquoi j'écris 8 au quotient, et au lieu de porter sous 7569, le produit de 932 par 8, je multiplie d'abord 2 par 8, ce qui me donne 16; mais comme je ne puis ôter 16 de 9, j'emprunte sur le chiffre suivant 6, une dixaine qui, jointe à 9 me donne 19, duquel ôtant 16, il me reste 3 que j'écris au-dessous.

Pour tenir compte de cette dixaine empruntée, au lieu de diminuer d'une unité le chiffre 6 sur lequel j'ai emprunté, je retiens cette unité que je vais ajouter au produit suivant; ainsi continuant la multiplication, je dis 8 fois 3 font 24, et un que j'ai retenu font 25; comme je ne puis ôter 25 de 6, j'emprunte sur le chiffre suivant 5 du dividende, deux dixaines, qui, jointes à 6, me donnent 26, desquelles j'ôte 25, et il me reste 1 que j'écris sous 6; par là j'ai tenu compte de la première dixaine dont j'aurais dû diminuer 6, parce que j'ai retranché une dixaine de plus. Je tiendrai, de même, compte des deux dixaines que je viens d'emprunter. Je continue donc en disant : 8 fois 9 font 72, et 2 que j'ai empruntés font 74, lesquels ôtés de 75 il reste 1.

J'abaisse à côté du reste 113 le chiffre 8 du dividende, et je continue de la même manière, en disant : en 11 combien de fois 9? 1 fois; puis une fois 2 fait 2, qui ôtés de 8 il reste 6; une fois 3 fait 3, qui ôtés de 3 il reste 0; une fois 9 est 9, qui ôtés de 11 il reste 2. J'abaisse le chiffre 4 à côté du reste 206, et je dis en 20 combien de fois 9? 2 fois; et faisant la multiplication, 2 fois 2 font 4; qui ôtés de 4 il reste 0; 2 fois 3 font 6, qui

ôtés de 6 reste 0; et enfin 2 fois 9 font 18, qui ôtés de 20 il reste 2.

66. Il peut arriver dans le cours de ces divisions partielles, que le dividende contienne le diviseur plus de 9 fois; cependant on ne doit jamais mettre plus de 9 au quotient; car si l'on pouvait seulement mettre 10, ce serait une preuve que le quotient trouvé par l'opération précédente serait faux, puisque la dixaine qu'on trouverait dans le quotient actuel, appartiendrait à ce premier quotient.

67. Si le dividende et le diviseur étaient suivis de zéro, on pourrait en ôter à l'un et à l'autre autant qu'il y en a à la suite de celui qui en a le moins. Par exemple, pour diviser 8000 par 400, je diviserai seulement 80 par 4; car il est évident que 80 centaines ne contiennent pas plus 4 centaines, que 80 unités ne contiennent 4 unités.

De la Division des Parties décimales.

68. Pour ne point nous arrêter à des distinctions superflues, nous réduirons l'opération de la division des décimales à cette règle seule.

Mettez à la suite de celui des deux nombres proposés, qui a le moins de décimales, un nombre de zéros suffisant pour que le nombre des décimales soit le même dans chacun; cela ne changera rien à la valeur de ce nombre (30); supprimez la virgule dans l'un et dans l'autre, et faites l'opération comme pour les nombres entiers; il n'y aura rien à changer au quotient que vous trouverez.

EXEMPLE.

On propose de diviser 12,52 par 4,3.

J'écris.....	12,52	4,3
Ou plutôt.....	12,52	4,30

en complétant le nombre des décimales.

Supprimant la virgule, j'ai 1252 à diviser par 430; faisant l'opération.

$$\begin{array}{r|l} 1252 & 430 \\ \hline 392 & 2\ \frac{392}{430} \end{array}$$

Je trouve 2 pour quotient, et 392 pour reste, c'est-à-dire que le quotient est 2 et $\frac{392}{430}$.

Mais comme l'objet qu'on se propose, quand on se sert de décimales, est d'éviter les fractions ordinaires, au lieu d'écrire le reste 392 sous la forme de fraction, comme on vient de le faire, on continuera l'opération comme dans l'exemple suivant.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{r|l} 1252 & 430 \\ \hline & 2,9116 \\ 3920 & \\ 500 & \\ 700 & \\ 2700 & \\ 120. & \end{array}$$

Après avoir trouvé le quotient en entier, qui est ici 2, on mettra à côté du reste 392, un zéro qui, à la vérité, rendra ce reste dix fois trop grand; on continuera de diviser par 430, et ayant trouvé qu'il faudrait mettre 9 au quotient, on l'y mettra en effet, mais après avoir marqué la place des unités entières, en mettant une virgule après le 2; par ce moyen, le 9 ne marquera plus que des dixièmes: après la multiplication et la soustraction faites, on mettra à côté du reste 50 un zéro, ce qui est la même chose que si l'on en avait mis d'abord deux à côté du dividende; mais en mettant après 9 le quotient 1 qu'on trouvera, on lui donnera par là sa véritable valeur, puisqu'alors il marque des centièmes; on continuera ainsi tant qu'on le jugera nécessaire. En s'en tenant à deux décimales, on a la valeur du quotient à moins d'un centième d'unité près; en poussant jusqu'après trois chiffres, on a le quotient à moins d'un millième près, et ainsi de suite, puisqu'on n'aurait pas pu mettre une unité de plus ou de moins, sans rendre le quotient trop fort ou trop faible.

Tous les restes de division peuvent être réduits ainsi en décimales.

Il reste à expliquer pourquoi la suppression de la virgule dans le dividende et dans le diviseur ne change rien au quotient, lorsqu'on a rendu le nombre des décimales le même dans chacun de ces deux nombres : c'est ce qu'il est aisé d'apercevoir, parce que dans l'exemple ci-dessus le dividende 12,52, et le diviseur 4,30 ne sont autre chose que 1252 centièmes et 430 centièmes, puisque les unités entières valent des centaines de centièmes (22); or, il est clair que 1252 centièmes ne contiennent pas autrement 430 centièmes, que 1252 unités ne contiennent 430 unités; donc la considération de la virgule est inutile, quand on a complété le nombre des décimales.

69. Lorsqu'on n'a besoin de connaître le quotient d'une division que jusqu'à un degré d'exactitude proposé, on peut abréger le calcul par la méthode suivante. Nous supposerons d'abord, qu'on n'a besoin de connaître ce quotient qu'à une unité près : nous ferons voir ensuite comment on doit appliquer la méthode, pour l'avoir aussi près qu'on voudra : voici la règle.

Supprimez, sur la droite du dividende, autant de chiffres, moins un, qu'il y en a dans le diviseur : faites ensuite la division comme à l'ordinaire : s'il n'y a point de reste, vous mettrez à la suite du quotient autant de zéros, que vous avez supprimé de chiffres dans le dividende. Mais s'il y a un reste, vous continuerez de diviser, non pas par le même diviseur qu'auparavant, ce qui n'est plus possible, mais par ce diviseur dont vous aurez supprimé le dernier chiffre de la droite : après cette division, vous diviserez le nouveau reste par le diviseur précédent, dont vous supprimez le dernier chiffre sur la droite; et vous continuerez ainsi de diviser, en supprimant à chaque division un chiffre sur la droite du diviseur.

EXEMPLE.

On veut avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 878923 6487 divisé par 64423. Je supprime les quatre premiers chiffres de la droite du dividende, et je divise 878923 par le diviseur proposé 64423.

```
878923 | 64423
234693 | 13643 6
41424 .. 6442
2772 .. 644
196 .. 64
4 .. 6
```

Je trouve d'abord 13 pour quotient, et 41424 pour reste : je divise donc 41424 par 6442, en supprimant le dernier chiffre 3 du diviseur : j'ai pour quotient 6, que j'écris à la suite du premier quotient 13; et le reste est 2772 que je divise par 644, en supprimant encore un chiffre sur la droite du diviseur primitif : j'ai pour quotient 4, que j'écris à la suite du quotient principal 136; le reste est 196 que je divise par 64, en supprimant encore un chiffre dans le diviseur : le quotient est 3, et le reste 4. Enfin je divise par 6, et j'ai 0 pour quotient; ensorte que le quotient de 8789236487 divisé par 64423, est 136430, à moins d'une unité près. En effet, le quotient exact est $136430\frac{6597}{64423}$.

Il n'est pas indispensable d'écrire à chaque fois, comme nous l'avons fait, le nouveau diviseur; on peut se contenter de barrer, dans le diviseur primitif, chaque chiffre à mesure qu'on passe à une nouvelle division : ce n'a été que pour rendre l'opération plus sensible, que nous avons écrit ces diviseurs à côté des restes successifs.

70. Si le reste de la première division se trouvait plus petit que n'est le diviseur après qu'on en a supprimé le dernier chiffre, on mettrait zéro au quotient; et s'il se trouvait encore plus petit que ne serait ce diviseur, après qu'on en a encore ôté le dernier des chiffres restans, on mettrait encore un zéro au quotient, et ainsi de suite.

EXEMPLE.

Pour avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 55106054 divisé par 643, je divise, comme à l'ordinaire, la partie 551060 qui reste après la suppression des deux derniers chiffres du dividende proposé.

```
551060 | 643
  3666 | 85701
  4510
   009..64
     9..6
     3
```

J'ai pour quotient 857, et 9 pour reste : il faut donc diviser ce reste par 64, seulement; comme 9 ne contient pas ce diviseur, je mets 0 au quotient, et j'ai encore pour reste 9, que je divise par 6 seulement, ensorte que le quotient cherché est 85701, à moins d'une unité près.

71. Si lorsqu'au commencement de l'opération on supprime sur la droite du dividende les chiffres que la règle prescrit de supprimer, il se trouve que les chiffres restans ne contiennent pas le diviseur, on supprimera tout de suite, sur la droite du diviseur, autant de chiffres qu'il est nécessaire pour que le diviseur y soit contenu.

EXEMPLE.

On veut avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 1611527 divisé par 64524.

Je supprime les quatre chiffres 1527 de la droite du dividende. Mais comme les chiffres restans 161 ne peuvent pas être divisés par 64524, je supprime, dans ce diviseur, les trois derniers chiffres 524 qui doivent être supprimés pour que ce diviseur soit contenu dans le dividende restant 161; ainsi je divise 161 par 64, en opérant comme dans l'exemple précédent,

```
      | 64
161   |----
      | 25
 33...6
  3
```

et j'ai 25 pour le quotient de 1611527 divisé par 64524, à moins d'une unité près: en effet, le quotient exact est $24\frac{62952}{64924}$ qui est beaucoup plus près de 25 que de 24.

72. A mesure qu'on supprime un chiffre dans le diviseur, il convient, pour plus d'exactitude, d'augmenter d'une unité le dernier de ceux qui restent, si celui qu'on supprime est au-dessus de 5 ou égal à 5. On augmentera, de même, d'une unité, le dernier des chiffres qui restent dans le dividende, après la suppression que la règle prescrit, si ceux-ci surpassent ou 5, ou 10, ou 50, selon qu'il y en a 1, ou 2, ou 3, etc.

EXEMPLE.

On veut avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 8657627 divisé par 1987.

Je divise donc 8658 par 1987, comme il suit:

```
      | 1987
8658  |------
      | 4357
 710..199
 113..20
  13...2
```

c'est-à-dire, qu'au lieu de diviser le reste 710 par 198 seulement, je le divise par 199, parce que le dernier chiffre 7, que je supprime, est au-dessus de 5. Même raison pour la division suivante. Mais comme le dernier diviseur qui est contenu 6 fois $\frac{1}{2}$ dans 13, est un peu trop fort, je mets 7 au quotient.

73. Maintenant il est facile de voir ce qu'il y a à faire, lorsqu'on veut avoir le quotient beaucoup plus exactement. Par exemple, si l'on voulait

avoir le quotient, à un dix-millième d'unité près, la question se réduirait à mettre autant de zéros (ici ce serait quatre) à la suite du dividende, qu'on veut avoir de décimales au quotient ; après quoi on fera la division selon la méthode actuelle. Et lorsqu'on aura trouvé le quotient, à moins d'une unité près, on en séparera sur la droite, par une virgule, autant de chiffres qu'on voulait avoir de décimales.

EXEMPLE.

On veut avoir, à moins d'un dix-millième d'unité près, le quotient de 6927 divisé par 4532 : je mets quatre zéros à la suite de 6927, et la question se réduit à avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 69270000 divisé par 4532, c'est-à-dire conformément à la règle ci-dessus, à diviser 69270 par 4532, comme il suit :

$$\begin{array}{r|l} 69270 & 4532 \\ \cline{2-2} 23950 & 15285 \\ 1290\,..\,453 & \\ 384\,..\,45 & \\ 24\,..\,5 & \end{array}$$

le quotient cherché est donc 1,5285, à moins d'un dix-millième d'unité près.

S'il y avait des décimales dans le dividende, ou dans le diviseur, ou dans tous les deux, on les ramènerait d'abord à n'en point avoir, selon ce qui a été dit (68) ; après quoi on opérerait comme dans ce dernier exemple.

Donc si l'on voulait réduire une fraction proposée, en décimales, on y parviendrait promptement par cette méthode, ayant égard à ce qui a été dit (71).

Ainsi si l'on veut réduire $\frac{4253}{9678}$ en décimales, et en avoir la valeur à moins d'un millième d'unité près, on aura 4253000 à diviser par 9678 ; ce qui (69) se réduira à diviser 4253 par 9678, et (71 et 72) à diviser 4253 par 968, selon la méthode actuelle. On trouvera donc 439 ; ensorte qu'on aura 0,439 pour la valeur de $\frac{4253}{9678}$, à moins d'un millième près.

Il pourrait arriver néanmoins que le quotient trouvé d'après ces règles, fût fautif de 1, 2, ou 3 unités dans le dernier chiffre. Quoique ce cas doive se rencontrer très-rarement, il n'est pas inutile de faire observer qu'on peut toujours le prévenir facilement, en ne séparant, au commencement de l'opération sur la droite du dividende, qu'autant de chiffres moins deux qu'il y en a dans le diviseur, en opérant, du reste, comme ci-dessus. Lorsque le quotient sera trouvé, on en supprimera le dernier chiffre, en observant d'ajouter une unité au dernier de ceux qui resteront, si celui qu'on supprime est plus grand que 5.

Preuve de la Multiplication et de la Division.

74. On peut tirer de la définition même que nous avons donnée de chacune de ces deux opérations; le moyen d'en faire la preuve.

Puisque dans la multiplication on prend le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient d'unités, il s'ensuit que si l'on cherche combien de fois le produit contient le multiplicande, c'est-à-dire (59) si l'on divise le produit par le multiplicande, on doit trouver, pour quotient, le multiplicateur; et *vice versâ*, en général, *si l'on divise le produit d'une multiplication par l'un de ses facteurs, on doit trouver pour quotient l'autre facteur.*

Par exemple, ayant trouvé ci-dessus (50) que 2864 multiplié par 6 a donné 17184, je divise 17184 par 2864; je dois trouver, et je trouve en effet, 6 pour quotient.

Pareillement, puisque le quotient d'une division marque combien de fois le dividende contient le diviseur, il s'ensuit que si l'on prend le diviseur autant de fois qu'il est marqué par le quotient, c'est-à-dire si l'on multiplie le diviseur par le quotient, on doit reproduire le dividende, lorsque la division a été faite sans reste, et que, dans le cas où il y a un reste, si l'on multiplie le diviseur par le quotient, et qu'au produit on ajoute le reste de la division, on doit reproduire le dividende.

Par exemple, nous avons trouvé ci-dessus (63) que 189492 divisé par 375, donnait 505 pour quotient, et 117 pour reste. En multipliant 375 par 505, on trouve 189375, auquel ajoutant le reste 117, on retrouve le dividende 189492.

Ainsi la multiplication et la division peuvent se servir de preuve réciproquement.

Mais on peut vérifier ces opérations par un moyen plus prompt que nous allons exposer; il ne faut pas, pour cela, négliger les réflexions que nous venons de faire; elles seront utiles dans beaucoup d'autres occasions.

Preuve par 9.

75. Supposons qu'après avoir multiplié 65498 par 454, et trouvé que le produit est 29736092, on veuille éprouver si ce produit est exact.

On ajoutera tous les chiffres 6,5,4,9,8, du multiplicande, comme s'ils ne contenaient que des unités simples, et on retranchera 9 à mesure qu'il se trouvera dans la somme : on aura un reste qui sera ici 5.

On ajoutera pareillement les chiffres 4, 5, 4, du multiplicateur, et retranchant pareillement tous les 9 que produira cette addition, on aura pour reste 4.

On multipliera le reste 5 du multiplicande par le reste 4 du multiplicateur, et du produit 20 on retranchera les 9 qu'il peut renfermer; il restera 2.

Si le produit est exact, il faut qu'ajoutant de même tous les chiffres 2, 9, 7, 3, 6, 0, 9, 2, de ce produit, et retranchant tous les 9, il ne reste aussi que 2; ce qui a lieu en effet.

Cette règle est fondée sur ce principe que, pour avoir le reste de la soustraction de tous les 9 qu'un nombre peut renfermer, il n'y a qu'à chercher le reste que ses chiffres, ajoutés comme des unités simples, donneraient après la suppression des 9.

En effet, si d'un nombre exprimé par un seul chiffre suivi de plusieurs zéros on retranche tous les 9, le reste sera exprimé par ce seul chiffre. Si de 4000, ou de 500, ou de 60,000, vous retranchez tous les 9, le reste sera 4, ou 5, ou 6, etc., ce qui est aisé à voir.

Donc le reste que donnerait, par la suppression des 9, un nombre tel que 65498 (qui est la même chose que 60,000, plus 5000, plus 400, plus 90, plus 8) sera le même que celui que donneraient 6 plus 5, plus 4, plus 9, plus 8; c'est-à-dire le même que si l'on ajoutait ces chiffres contenant des unités simples.

En voici maintenant l'application à la preuve de la multiplication.

Puisque 65498 est composé d'un certain nombre de 9 et d'un reste 5, et que le multiplicateur 453 est composé aussi d'un certain nombre de 9 et d'un reste 4, il ne peut s'en falloir que du produit de 5 par 4 ou 20, que le produit total ne soit divisible par 9, ou, en ôtant les 9, il ne doit s'en falloir que de 2 que le produit total ne soit divisible par 9 : donc il doit rester au produit la même quantité que dans le produit des deux restes, après la suppression des 9 qu'il renferme.

On pourrait faire aussi cette épreuve de la même manière par le nombre 3.

A l'égard de la division, elle devient facile à éprouver, d'après ce qui a été dit (70) après avoir ôté du dividende le reste qu'a donné la division, on regardera le résultat comme un produit dont le diviseur et le quotient sont les facteurs, et par conséquent on y appliquera la preuve par 9, de la même manière qu'on vient de le faire.

A parler exactement, cette vérification n'est pas infaillible; parce que dans la multiplication, par exemple, si l'on s'était trompé de quelques unités sur quelque chiffre du produit, et qu'en même temps on eût fait une erreur égale, mais en sens contraire, sur quelque autre chiffre du même produit; comme cela ne changerait rien au reste que l'on aurait après la suppression des 9, cette règle ne ferait point apercevoir l'erreur; mais comme il faut, ainsi qu'on le voit, au moins deux erreurs, et deux erreurs qui se compensent, ou qui ne diffèrent que d'un certain nombre de fois 9, les cas où cette vérification serait fautive, seront très-rares dans l'usage.

Quelques usages de la Règle précédente.

76. La division sert non-seulement à trouver combien de fois un nombre en contient un autre, mais encore à partager un nombre en parties égales. Prendre la moitié, le tiers, le quart, le cinquième, le vingtième, le trentième, etc., d'un nombre, c'est diviser ce nombre par 2, 3, 4, 5, 20, 30, etc., ou le partager en 2, 3, 4, 5, 6, 20, 30, etc., parties égales, pour prendre une de ses parties (B).

La division sert encore à convertir les unités d'une certaine espèce, en unités d'une espèce supérieure; par exemple, un certain nombre de deniers en sous, et ceux-ci en livres. Pour

réduire 5864 deniers en sous, on remarquera que puisqu'il faut 12 deniers pour faire un sou, autant de fois il y aura 12 deniers dans 5864 deniers, autant il y aura de sous; il faut donc diviser par 12, et on trouvera 488 sous et 8 deniers de reste. Pour réduire en liv. les 488 sous, on divisera 488 par 20, puisqu'il faut 20 sous pour faire la livre, et on aura en total 24 livres 8 sous 8 deniers.

A l'occasion de cette division par 20, remarquons que quand on a à diviser par un nombre suivi de zéros, on peut abréger l'opération en séparant sur la droite du dividende autant de chiffres qu'il y a de zéros; on divise la partie qui reste à gauche par les chiffres significatifs du diviseur; s'il y a un reste, on écrit à sa suite les chiffres qu'on a séparés, ce qui donne le reste total. Par exemple, pour diviser 5834 par 20, je sépare le dernier chiffre 4, et je divise par 2 la partie restante 583; j'ai pour quotient 291, et 1 pour reste; j'écris à côté de ce reste 1, le chiffre séparé 4, ce qui me donne 14 pour reste total; ensorte que le quotient est 291 $\frac{14}{20}$.

Cette abréviation peut être appliquée à la réduction de la charge d'un navire en tonneaux de poids. Si l'on sait que la charge est de 2584954 ℔ : pour la réduire en tonneaux, c'est-à-dire, pour diviser par 2000, on séparera les trois derniers chiffres de la droite, et prenant la moitié des autres, on aura 1292 tonneaux et 954 ℔.

Quand on veut évaluer en livres et sous le vingtième d'un nombre de livres proposé, il suit de cette règle, que l'opération se réduit à compter le dernier chiffre pour des sous, et prendre moitié des autres chiffres que l'on comptera pour des livres. Si en prenant cette moitié, il reste une unité, on la comptera pour une dixaine de sous qu'on placera à la gauche du chiffre qu'on a séparé d'abord. Par exemple, si l'on veut avoir le vingtième de 54672 livres, on séparera le dernier chiffre 2, que l'on comptera pour 2 sous; et prenant la moitié de 5467, qui est 2733, avec une unité de reste, on écrira 2733 livres 12 sous: la raison de cette règle est évidente, en faisant attention que 54672 livres est 54660 livres, plus 12 livres; or le vingtième de 54660 est évidemment 2733, et celui de 12 livres est 12 sous, puisque le vingtième d'une livre est un sou. S'il y avait des sous et deniers dans la somme proposée, on négligerait les deniers, dont la vingtième partie ne peut jamais faire un denier. A l'égard des sous, on les tri-

plerait; et prenant le cinquième, on le porterait aux deniers. Ainsi le vingtième de 54672 liv. 17 s. 7 d est 2733 liv. 12 s. 10 d.

S'il s'agissait d'avoir le dixième d'un nombre de livres, on séparerait le dernier chiffre, et l'ayant doublé, on le compterait pour des sous; et on compterait comme des livres tous les chiffres restans sur la gauche. Ainsi le dixième de 67987 liv. est 6798 liv. 14 s. La raison pour laquelle on double le dernier chiffre, est que le dixième d'une livre est 2 sous.

On a assez souvent besoin de prendre les 4 deniers pour livre d'une somme proposée: cela se réduit à en prendre d'abord le vingtième, comme il vient d'être dit; puis prendre le tiers de ce vingtième. Ainsi pour avoir les quatre deniers pour livre de 8762 livres, j'en prends le vingtième, qui est 438 liv. 2 sous; dont le tiers 146 liv. 9 s. 8 den. forme les quatre deniers pour livre de 8762 liv. En effet, les quatre deniers pour livre ne sont autre chose que le soixantième, puisque 4 deniers sont contenus 60 fois dans la livre. Or le soixantième est le tiers du vingtième.

Des Fractions.

77. Les fractions considérées arithmétiquement, sont des nombres par lesquels on exprime les quantités plus petites que l'unité.

78. Pour se faire une idée nette des fractions, il faut concevoir que la quantité qu'on a prise d'abord pour unité, est elle-même composée d'un certain nombre d'unités plus petites; comme l'on conçoit, par exemple, que la livre est composée de vingt parties ou de vingt unités plus petites, qu'on appelle *sous*.

Une ou plusieurs de ces parties forment ce qu'on appelle une *fraction de l'unité*. On donne aussi ce nom aux nombres qui représentent ces parties.

79. Une fraction peut être exprimée en nombres de deux manières qui sont chacune en usage.

La première manière consiste à représenter, comme les nombres entiers, les parties de l'unité que contient la quantité dont il s'agit; mais alors on donne un nom particulier à ces parties: ainsi pour marquer 7 parties dont on en conçoit 20 dans la livre, on emploierait le chiffre 7, mais on prononcerait 7 sous, et on écrira 7^s : cette manière de marquer les parties de l'unité a lieu dans les nombres *complexes*, dont nous parlerons par la suite.

80. Mais comme il faudra un signe particulier pour chaque division

division qu'on pourrait faire de l'unité, on évite cette multiplicité de signes, en marquant une fraction par deux nombres placés l'un au-dessous de l'autre, et séparés par un trait. Ainsi pour marquer les 7 parties dont il vient d'être question, on écrit $\frac{7}{20}$; c'est-à-dire qu'en général on écrit d'abord le nombre qui marque combien la quantité dont il s'agit contient de parties de l'unité; et on écrit au-dessous de ce nombre, celui qui marque combien on conçoit de ces parties dans l'unité.

81. Et pour énoncer une fraction, on énonce d'abord le nombre supérieur (qui s'appelle *le numérateur*); ensuite le nombre inférieur (qui s'appelle le *dénominateur*); mais on ajoute au nom de celui-ci la terminaison *ième*: par exemple, pour énoncer $\frac{7}{20}$ on prononcera *sept vingtièmes;* pour énoncer $\frac{4}{5}$, on prononcera *quatre cinquièmes;* et par cette expression *quatre cinquièmes*, on doit entendre quatre parties, dont il en faudrait 5 pour composer l'unité.

Il faut seulement excepter de la terminaison générale, les fractions dont le dénominateur est 2 ou 3, ou 4, qui se prononcent *moitiés* ou *demies*, *tiers*, *quarts*. Ainsi ces fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, se prononceraient *demi*, *deux tiers*, *trois quarts*.

82. Le numérateur marque donc combien la quantité représentée par la fraction contient de parties de l'unité; et le dénominateur fait connaître de quelle valeur sont ces parties, en marquant combien il en faut pour composer l'unité. On lui donne le nom de dénominateur, parce que c'est lui en effet qui donne le nom à la fraction, et qui fait que dans ces deux fractions, par exemple, $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{7}$, les parties de la première s'appellent des *cinquièmes*, et les parties de la seconde des *septièmes*.

83. Le numérateur et le dénominateur s'appellent aussi, d'un nom commun, les *deux termes de la fraction*.

Des Entiers considérés sous la forme de Fraction.

84. Les opérations qu'on fait sur les fractions conduisent souvent à des résultats fractionnaires, dont le numérateur est plus grand que le dénominateur, par exemple, à des résultats tels que $\frac{8}{8}$, $\frac{27}{5}$ etc.

Ces sortes d'expressions ne sont pas des fractions proprement dites, mais ce sont des nombres entiers joints à des fractions.

85. Pour extraire les entiers qui s'y trouvent renfermés, il faut diviser le numérateur par le dénominateur. Le quotient marquera les entiers, et le reste de la division sera le numérateur de la fraction qui accompagne ces entiers. Ainsi $\frac{27}{5}$ donneront $5\frac{2}{5}$, c'est-à-dire cinq entiers et deux cinquièmes.

En effet, dans l'expression $\frac{27}{5}$, le dénominateur 5 fait connaître que l'unité est composée de 5 parties; donc autant de fois il y aura 5 dans 27, autant il y aura d'unités entières dans la valeur de la fraction $\frac{27}{5}$.

86. Les multiplications et les divisions des nombres entiers joints aux fractions, exigent, du moins pour la facilité, qu'on convertisse ces entiers en fraction.

On fait cette conversion en multipliant le nombre entier par le dénominateur de la fraction en laquelle on veut réduire cet entier. Par exemple, si on veut convertir 8 entiers en cinquièmes, on multipliera 8 par 5, et on aura $\frac{40}{5}$. En effet, lorsqu'on veut convertir 8 en cinquièmes, on regarde l'unité comme composée de 5 parties; les 8 unités en contiendront donc 40 : pareillement $7\frac{4}{9}$, convertis en neuvièmes, feront $\frac{67}{9}$.

Des changemens qu'on peut faire subir aux deux termes d'une Fraction sans changer sa valeur.

87. Il est visible que plus on concevra de parties dans l'unité, et plus il faudra de ces parties pour composer une même quantité.

88. Donc on peut rendre le dénominateur d'une fraction, double, triple, quadruple, etc., sans rien changer à la valeur de la fraction, pourvu qu'en même temps on rende aussi le numérateur double, triple, quadruple, etc.

On peut donc dire en général, qu'*une fraction ne change point de valeur, quand on multiplie ses deux termes par un même nombre.*

Ainsi $\frac{3}{4}$ est la même chose que $\frac{6}{8}$; $\frac{1}{2}$ la même chose que $\frac{2}{4}$, que $\frac{3}{6}$, que $\frac{5}{10}$, etc.

89. Par un raisonnement semblable, on voit que moins on supposera de parties dans l'unité, moins il faudra de ces parties pour former une même quantité; que par conséquent on peut, sans changer une fraction, rendre son dénominateur 2, 3, 4, etc. fois plus petit, pourvu qu'en même temps on rende son numérateur, 2, 3, 4, etc. fois plus petit; et en général, une *fraction ne change point de valeur quand on divise ses deux termes par un même nombre.*

Pour voir distinctement la vérité de ces deux propositions, il suffit de se rappeler ce que c'est que le dénominateur, et ce que c'est que le numérateur d'une fraction.

Remarquons donc que multiplier ou diviser les deux termes d'une fraction par un même nombre, n'est point multiplier ou diviser la fraction, puisque, comme nous venons de le dire, elle ne change point de valeur par ces opérations.

Les deux principes que nous venons de poser sont la base des deux réductions suivantes qui sont d'un très-grand usage.

Réduction des Fractions à un même dénominateur.

90. 1°. Pour réduire deux fractions à un même dénominateur, multipliez les deux termes de la première, chacun par le dénominateur de la seconde, et les deux termes de la seconde, chacun par le dénominateur de la première.

Par exemple, pour réduire à un même dénominateur les deux fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, je multiplie 2 et 3 qui sont les deux termes de la première fraction, chacun par 4, dénominateur de la seconde, et j'ai $\frac{8}{12}$ qui (88) est de même valeur que $\frac{2}{3}$.

Je multiplie de même les deux termes 3 et 4 de la seconde fraction, chacun par 3, dénominateur de la première, et j'ai $\frac{9}{12}$ qui est de même valeur que $\frac{3}{4}$; ensorte que les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ sont changées en $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$, qui sont respectivement de même valeur que celles-là, et qui ont le même dénominateur entre elles.

Il est aisé de voir que par cette méthode le dénominateur sera toujours le même pour chacune des deux nouvelles fractions, puisque dans chaque opération le nouveau dénominateur est formé de la multiplication des deux dénominateurs primitifs.

91. 2°. Si on a plus de deux fractions, on les réduira toutes au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chacune par le produit résultant de la multiplication des dénominateurs des autres fractions.

Par exemple, pour réduire à un même dénominateur les quatre fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, je multiplierai les deux termes 2 et 3 de la première, par le produit des trois dénominateurs 4, 5, 7, des autres fractions ; produit que je trouve en disant : 4 fois 5 font 20, puis 7 fois 20 font 140 ; je multiplie donc 2 et 3 chacun par 140, et j'ai $\frac{280}{420}$ qui est de même valeur que $\frac{2}{3}$ (88).

Je multiplie pareillement les deux termes 3 et 4 de la seconde fraction, par le produit de 3, 5, 7, produit que je forme en disant : 3 fois 5 font 15, puis 7 fois 15 font 105; je multiplie donc 3 et 4 chacun par 105, ce qui me donne $\frac{315}{420}$, fraction de même valeur que $\frac{3}{4}$.

Passant à la troisième fraction, je multiplie ses deux termes 4 et 5 chacun par 84, produit des trois dénominateurs 3, 4 et 7, et j'ai $\frac{336}{420}$ au lieu de $\frac{4}{5}$.

Enfin pour la quatrième, je multiplierai 5 et 7 chacun par le produit 60 des dénominateurs, 3, 4, 5, des trois premières fractions, et j'aurai $\frac{300}{420}$ au lieu de $\frac{5}{7}$, ensorte que les quatre fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$ sont changées en $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, $\frac{300}{420}$, moins simples, à la vérité que celles-là, mais de même valeur qu'elles, et plus susceptibles, par leur dénominateur commun, des opérations de l'addition et de la soustraction.

Remarquons que le dénominateur de chaque nouvelle fraction étant formé du produit de tous les dénominateurs primitifs, ce nouveau dénominateur ne peut manquer d'être le même pour chaque fraction (C).

Réduction des Fractions à leur plus simple expression.

92. Une fraction est d'autant plus simple, que ses deux termes sont de plus petits nombres. Il est souvent possible d'amener une fraction proposée à être exprimée par de moindres nombres, et cela lorsque son numérateur et son dénominateur peuvent être divisés par un même nombre; comme cette opération n'en change point la valeur (89), c'est une simplification qu'on ne doit point négliger.

Voici le procédé qu'il faudra suivre.

93. On divisera le numérateur et le dénominateur chacun par 2, et on répétera cette division tant qu'elle pourra se faire exactement.

On divisera ensuite les deux termes par 3, et on continuera de diviser l'un et l'autre par 3, tant que cela pourra se faire.

On fera la même chose successivement avec les nombres 5, 7, 11, 13, 17, etc., c'est-à-dire avec les nombres qui n'ont aucun diviseur qu'eux-mêmes, ou l'unité, et qu'on appelle *nombres premiers*.

Ainsi la seule difficulté qu'il y ait est de savoir quand est-ce qu'on pourra diviser par 2, 3, 5, etc.

On pourra dans cette recherche s'aider des principes suivans.

94. Tout nombre qui finit par un chiffre pair est divisible par 2.

Tout nombre dont la somme des chiffres ajoutés ensemble, comme s'ils étaient des unités simples, fera 3 ou un *multiple* de 3, c'est-à-dire un nombre exact de fois 3 sera divisible par 3.

Par exemple, 54231 est divisible par 3, parce que ses chiffres 5, 4, 2, 3, 1, font 15, qui est 5 fois 3.

La même chose a lieu pour le nombre 9, si les chiffres ajoutés ensemble font 9, ou un multiple de 9.

Cette propriété du nombre 3 se démontre comme celle du nombre 9, à très-peu de chose près, et l'un et l'autre se démontrent comme on l'a fait à la preuve de 9 (75).

Tout nombre terminé par un 5 ou par un zéro est divisible par 5.

A l'égard du nombre 7 et des suivans, quoiqu'il soit facile de trouver de pareilles règles, comme l'examen qu'elles supposent est aussi long que la division, il faudra essayer la division.

Proposons-nous, par exemple, de réduire la fraction $\frac{2016}{5796}$. Je divise les deux termes par 2, parce que les deux derniers chiffres de chacun sont pairs, et j'ai $\frac{1008}{2898}$. Je divise encore par

2 et j'ai $\frac{504}{1449}$. Ce qui a été dit ci-dessus m'apprend que je puis diviser par 3; je divise en effet et j'ai $\frac{168}{483}$; je divise encore par 3, ce qui me donne $\frac{56}{161}$; enfin j'essaie de diviser par 7; la division réussit et me donne $\frac{8}{23}$.

La raison pour laquelle nous prescrivons de ne tenter la division que par les nombres premiers, 2, 3, 5, 7, etc., c'est qu'après avoir épuisé la division par 2, par exemple, il est inutile de tenter de diviser par 4, puisque si celle-ci pouvait réussir, à plus forte raison la division par 2 aurait-elle pu encore se faire.

95. De tous les moyens qu'on peut employer pour réduire une fraction à une expression plus simple, le plus direct est celui de diviser les deux termes par le plus grand diviseur commun qu'ils puissent avoir : voici la règle pour trouver ce plus grand diviseur commun.

Divisez le plus grand des deux termes par le plus petit; s'il n'y a point de reste, c'est le plus petit terme qui est le plus grand diviseur commun.

S'il y a un reste, divisez le plus petit terme par ce reste, et si la division se fait exactement, c'est ce premier reste qui est le plus grand diviseur commun.

Si cette seconde division donne un reste, divisez le premier reste par le second, et continuez toujours de diviser le reste précédent par le dernier reste, jusqu'à ce que vous arriviez à une division exacte. Alors le dernier diviseur que vous aurez employé sera le plus grand diviseur des deux termes de la fraction.

Si le dernier diviseur se trouve être l'unité, c'est une preuve que la fraction ne peut être réduite.

Prenons pour exemple la fraction $\frac{3760}{9024}$.

Je divise 9024; j'ai pour quotient 2, et pour reste 1504.

Je divise 3760 par 1504; j'ai pour quotient 2, et pour reste 752.

Je divise le premier reste 1504 par le second reste 752; la division réussit, et j'en conclus que 752 peut diviser les deux termes de la fraction $\frac{3760}{9024}$, et la réduire à sa plus simple expression, qu'on trouve, en faisant l'opération, être $\frac{5}{12}$.

En effet, on a trouvé que 752 divise 1504; il doit donc diviser 3760 qu'on a vu être composé de deux fois 1504 et de 752 : on voit de même qu'il doit diviser 9024, puisque 9024 est composé de deux fois 3760 et de 1504.

On voit de plus que 752 est le plus grand commun diviseur que puissent

avoir 3760 et 9024; car il ne peut y avoir de diviseur commun entre 9024 et 3760, qui ne le soit en même temps de 3760 et 1504; car entre ces deux-ci il ne peut y en avoir un qui ne soit en même temps diviseur commun de 1504 et de 752; mais il est évident qu'entre ces deux-ci il ne peut y avoir de diviseur commun plus grand que 752; donc, etc.

Différentes manières dont on peut envisager une Fraction, et conséquences qu'on peut en tirer.

96. L'idée que nous avons donnée jusqu'ici d'une fraction, est que le dénominateur représente de combien de parties l'unité est composée; et le numérateur, combien il y a de ces parties dans la quantité que la fraction exprime.

On peut encore envisager une fraction sous un autre point de vue : on peut considérer le numérateur comme représentant une certaine quantité qui doit être divisée en autant de parties qu'il y a d'unités dans le dénominateur. Par exemple, dans $\frac{4}{5}$, on peut considérer 4 comme représentant 4 choses quelconques, 4 liv., par exemple, qu'il s'agit de partager en cinq parties; car il est évident que c'est la même chose de partager 4 liv. en cinq parties, pour prendre une de ces parties, ou de partager une livre en cinq parties, pour prendre 4 de ces parties.

97. On peut donc considérer le numérateur d'une fraction comme un dividende, et le dénominateur comme un diviseur. On voit par là ce que signifient les restes de divisions mis sous la forme que nous leur avons donnée (60).

98. Il suit de là, 1°. qu'un entier peut toujours être mis sous la forme d'une fraction, en faisant de cet entier le numérateur, et lui donnant l'unité pour dénominateur; ainsi 8 ou $\frac{8}{1}$ sont la même chose; 5 ou $\frac{5}{1}$ sont la même chose.

99. 2°. Que pour convertir une fraction quelconque en décimales, il n'y a qu'à considérer le numérateur comme un reste de division où le dénominateur était diviseur, et opérer

par conséquent comme il a été dit (68 exemple II), en observant de mettre d'abord un zéro au quotient pour tenir la place des unités; c'est ainsi qu'on trouvera que $\frac{3}{5}$ valent en décimales 0,6; que $\frac{5}{9}$ valent 0,555, etc.; que $\frac{1}{25}$ vaut 0,04, et ainsi de suite.

C'est ainsi qu'on peut réduire en décimales tout nombre complexe proposé. Par exemple, s'il s'agit de réduire $3^T\ 5^P\ 8^P\ 7^l$ en décimales de la toise, de manière à ne pas négliger une demi-ligne : j'observe que la toise contient 864 lignes, et par conséquent 1728 demi-lignes; il faut donc, pour ne pas négliger les demi-lignes, porter l'exactitude au-delà des millièmes; c'est-à-dire jusqu'aux dix-millièmes.

Cela posé, je réduis les $5^P\ 8^P\ 7^l$ tout en lignes; et j'ai 823 lignes ou $\frac{823}{864}$ de la toise : réduisant cette fraction en décimales, comme il vient d'être dit, on a 0,9525, et par conséquent 3^T,9525 pour le nombre proposé.

Des opérations de l'Arithmétique sur les Fractions.

100. On fait sur les fractions les mêmes opérations que sur les nombres entiers. Les deux premières opérations, l'addition et la soustraction, exigent le plus souvent une opération préparatoire; les deux autres n'en exigent point.

De l'addition des Fractions.

101. Si les fractions ont le même dénominateur, on ajoutera tous les numérateurs, et on donnera à la somme le dénominateur commun de ces fractions. Ainsi pour ajouter $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$, j'ajoute les numérateurs 2, 3, 5, et j'ai par conséquent $\frac{10}{7}$ que je réduis à $1\frac{3}{7}$ (85).

102. Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on commencera par les y réduire par ce qui a été enseigné (90) et (91), après quoi on ajoutera ces nouvelles fractions de la manière qui vient d'être prescrite. Ainsi si l'on propose d'ajouter, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, je change ces trois fractions en trois autres $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$, dont la somme est $\frac{133}{60}$ qui se réduit à $2\frac{13}{60}$ (85).

De la Soustraction des Fractions.

103. Si les deux fractions proposées ont le même dénominateur, on retranchera le numérateur de l'une du numérateur de l'autre, et on donnera au reste le dénominateur commun de ces deux fractions. S'il est question de retrancher $\frac{5}{9}$ de $\frac{8}{9}$, le reste sera $\frac{3}{9}$ qui se réduit à $\frac{1}{3}$ (93).

104. Si de $9\frac{5}{8}$ on voulait retrancher $4\frac{7}{8}$; comme on ne peut ôter $\frac{7}{8}$ de $\frac{5}{8}$, on emprunterait sur 9 une unité, laquelle réduite en huitièmes et ajoutée à $\frac{5}{8}$, ferait $\frac{13}{8}$, desquels ôtant $\frac{7}{8}$, il resterait $\frac{6}{8}$; ôtant ensuite 4 de 8 qui restent après l'emprunt, il resterait en tout $4\frac{6}{8}$ ou $4\frac{3}{4}$.

105. Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on les y réduira (90) et (91); après quoi on fera la soustraction comme il vient d'être dit. Ainsi pour ôter $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, je change ces fractions en $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$, et retranchant 8 de 9, il me reste $\frac{1}{12}$.

De la Multiplication des Fractions.

106. *Pour multiplier une fraction par une fraction, il faut multiplier le numérateur de l'une par le numérateur de l'autre, et le dénominateur par le dénominateur.* Par exemple, pour multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, on multipliera 2 par 4, ce qui donnera 8 pour numérateur; multipliant pareillement 3 par 5, on aura 15 pour dénominateur, et par conséquent $\frac{8}{15}$ pour le produit.

Pour sentir la raison de cette règle, il faut se rappeler que multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient d'unités. Ainsi multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, c'est prendre $\frac{4}{5}$ de fois la fraction $\frac{2}{3}$, ou plus exactement, c'est prendre 4 fois le cinquième de $\frac{2}{3}$; or, en multipliant le dénominateur 3 par 5, on change les tiers en quinzièmes, c'est-à-dire en parties cinq fois plus petites; et en multipliant le numérateur 2 par 4, on prend ces nouvelles parties quatre fois; on prend donc quatre fois la cinquième partie de $\frac{2}{3}$: on multiplie donc en effet $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$.

107. Si l'on avait un entier à multiplier par une fraction, ou une fraction à multiplier par un entier, on mettrait l'entier sous la forme de fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur; par exemple, si j'ai 9 à multiplier par $\frac{4}{7}$, cela se réduit à multiplier $\frac{9}{1}$ par $\frac{4}{7}$, ce qui, selon la règle qu'on vient de donner, produit $\frac{36}{7}$ qui se réduisent à $5\frac{1}{7}$.

On voit donc que pour multiplier une fraction par un entier, ou un entier par une fraction, l'opération se réduit à multiplier le numérateur de cette fraction par l'entier.

108. S'il y avait des entiers joints aux fractions, il faudrait, avant de faire la multiplication, réduire ces entiers chacun en fraction de même espèce que celle qui l'accompagne. Par exemple, si l'on a $12\frac{3}{5}$ à multiplier par $9\frac{3}{4}$, je change (86) le multiplicande en $\frac{63}{5}$ et le multiplicateur en $\frac{39}{4}$, et je multiplie $\frac{63}{5}$ par $\frac{39}{4}$ selon la règle ci-dessus (106), ce qui me donne $\frac{2457}{20}$ qui valent $122\frac{17}{20}$.

Division des Fractions. (c)

109. *Pour diviser une fraction par une fraction, il faut renverser les deux termes de la fraction qui sert de diviseur, et multiplier la fraction dividende par cette fraction ainsi renversée.*

Par exemple, pour diviser $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, je renverse la fraction $\frac{2}{3}$, ce qui me donne $\frac{3}{2}$; je multiplie $\frac{4}{5}$ par $\frac{3}{2}$ selon la règle donnée (106), et j'ai $\frac{12}{10}$ pour le quotient de $\frac{4}{5}$ divisé par $\frac{2}{3}$.

Pour apercevoir la raison de cette règle, il faut observer que diviser $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, c'est chercher combien de fois $\frac{4}{5}$ contiennent $\frac{2}{3}$. Or il est facile de voir que, puisque le diviseur est des tiers, il sera contenu dans le dividende trois fois autant que s'il était des entiers; donc il faut diviser d'abord par deux, et multiplier ensuite par 3, ce qui n'est autre chose que prendre trois fois la moitié du dividende, ou le multiplier par $\frac{3}{2}$, qui est la fraction du diviseur renversée.

110. Si l'on avait une fraction à diviser par un entier, ou un entier à diviser par une fraction, on commencerait par mettre l'entier sous la forme de fraction, en lui donnant l'unité

pour dénominateur : par exemple, si l'on a 12 à diviser par $\frac{5}{7}$, on réduira l'opération à diviser $\frac{12}{1}$ par $\frac{5}{7}$, ce qui, selon la règle qu'on vient de donner, se réduit à multiplier $\frac{12}{1}$ par $\frac{7}{5}$, et donne $\frac{84}{5}$ ou $16\frac{4}{5}$. Pareillement, si l'on avait $\frac{3}{4}$ à diviser par 5, on réduirait l'opération à diviser $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{1}$, c'est-à-dire, à multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{1}{5}$, ce qui donne $\frac{3}{20}$.

On voit donc que lorsqu'on a une fraction à diviser par un entier, l'opération se réduit à multiplier le dénominateur par cet entier.

111. S'il y avait des entiers joints aux fractions, on réduirait ces entiers chacun en fraction de même espèce que celle qui l'accompagne. Par exemple, si l'on avait $54\frac{3}{5}$ à diviser par $12\frac{2}{3}$, on changerait le dividende en $\frac{273}{5}$, et le diviseur en $\frac{38}{3}$, et l'opération serait réduite à diviser $\frac{273}{5}$ par $\frac{38}{3}$, c'est-à-dire (109) à multiplier $\frac{273}{5}$ par $\frac{3}{38}$, ce qui donnerait $\frac{819}{190}$, ou $4\frac{59}{190}$.

Quelques applications des Règles précédentes.

112. Après ce que nous avons dit (96), il est aisé de voir comment on peut évaluer une fraction. Qu'on demande, par exemple, ce que valent les $\frac{5}{7}$ d'une livre? Puisque les $\frac{5}{7}$ d'une livre sont la même chose (96) que le septième de 5 livres, je réduis les 5 livres en sous (57) et je divise les 100 sous qu'elles me donnent, par 7, ce qui me donne 14 sous pour quotient, et 2 sous de reste; je réduis ces 2 sous en deniers, et je divise

24 deniers par 7; j'ai 3 deniers $\frac{3}{7}$. Ainsi les $\frac{5}{7}$ d'une livre sont 14 sous 3 deniers et $\frac{3}{7}$ de denier.

Si l'on demandait les $\frac{5}{7}$ de 24 livres, il est visible qu'on pourrait d'abord prendre, comme nous venons de le faire, les $\frac{5}{7}$ d'une livre, et multiplier ensuite par 24 ce qu'aurait donné cette opération; mais il est plus commode de multiplier d'abord $\frac{5}{7}$ par 24 livres, ce qui (107) donne $\frac{120}{7}$ livres, et d'évaluer ensuite cette dernière fraction, qu'on trouvera valoir 17 liv. 2 sous 10 deniers $\frac{2}{7}$.

113. Les fractions décimales n'ayant point de dénominateur, sont encore plus faciles à évaluer. Si l'on demande, par exemple, combien valent 0,532 de toise : comme la toise est de 6 pieds, je multiplierai 0,532 par 6, ce qui me donnera 3,192 pieds; c'est-à-dire 3^p et 0,192 de pied; multipliant cette dernière fraction par 12 pour évaluer en pouces, on aura 2,304 pouces, c'est-à-dire 2^p et 0,304 de pouce. Enfin multipliant celles-ci par 12 pour réduire en lignes, on aura 3,648 lignes, ou 3^l et 0,648 de ligne, c'est-à-dire que la valeur de la fraction 0,532 de toise, 3^p 2^p 3^l et 0,648 de ligne.

114. L'évaluation des fractions nous conduit naturellement à parler des *fractions* de *fractions*. On appelle ainsi une suite de fractions séparées les unes des autres par l'article *de*. Par exemple, $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$, etc., sont des fractions de fractions. On les réduit à une seule fraction, en multipliant tous les numérateurs entre eux, et tous les dénominateurs entre eux : ensorte que la fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ se réduit à $\frac{6}{12}$ ou $\frac{1}{2}$; la fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ se réduit à $\frac{30}{72}$ ou $\frac{5}{12}$.

En effet, il est facile de voir que prendre les $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ n'est autre chose que multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{3}$, puisque c'est prendre $\frac{2}{3}$ de fois la fraction $\frac{3}{4}$. Pareillement prendre les $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$, revient à prendre les $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$, puisque $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ reviennent à $\frac{6}{12}$, et ce qu'on vient de dire fait connaître que les $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$ reviennent à $\frac{30}{72}$ ou $\frac{5}{6}$.

Si l'on demandait les $\frac{3}{4}$ *de* $5\frac{3}{8}$, on convertirait l'entier 5 en huitièmes, et la question serait réduite à évaluer la fraction de fraction $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{43}{8}$ qu'on trouverait être $\frac{129}{32}$ ou $4\frac{1}{32}$.

Ajoutons à tout ce que nous avons dit sur les fractions, un exemple qui renferme plusieurs des règles que nous avons établies.

Supposons qu'on veut construire un vaisseau de 140 pieds $\frac{2}{3}$ de longueur; que les distances entre les sabords, en y comprenant l'espace entre le premier sabord et la rablure de l'étrave, et l'espace entre le dernier sabord et la rablure de l'étambot, fassent $108\frac{3}{4}$ pieds : on demande si l'on peut percer 12 sabords à la première batterie de chaque bord.

De 140 pieds $\frac{2}{3}$ je retranche $108\frac{3}{4}$ (103 *et suiv.*); il me reste $31\frac{11}{12}$ pour les sabords; je divise $31\frac{11}{12}$ par 12, c'est-à-dire $\frac{383}{12}$ par $\frac{12}{1}$ (86) et (110), j'ai pour quotient $\frac{383}{144}$ de pied, qui valent 2 pieds et $\frac{95}{144}$, fraction qui, évaluée en pouces et lignes, vaut 7 pouces 11 lignes; ainsi il faudrait donner à chaque

sabord 2 pieds 7 pouces 11 lignes, c'est-à-dire 2 pieds 8 pouces à peu près ; ce qui est une mesure convenable pour un vaisseau de 140 pieds $\frac{2}{3}$.

115. Lorsqu'une fraction exprimée par des nombres un peu considérables, n'est pas réductible par la méthode donnée (95), et qu'on peut se contenter d'en avoir une valeur approchée, on peut y parvenir par la méthode suivante qui donne alternativement des fractions plus grandes et plus petites que la proposée, mais toujours de plus en plus approchées, ensorte qu'à la dernière opération on retombe sur la fraction proposée. Prenons pour exemple la fraction $\frac{100000}{314159}$, qui, comme on le verra en Géométrie, exprime le rapport très-approché du diamètre à la circonférence ; et proposons-nous d'exprimer cette fraction par d'autres fractions, moins exactes à la vérité, mais exprimées par des nombres plus simples.

Divisez le numérateur et le dénominateur par le numérateur ; vous aurez $\frac{1}{3\frac{14159}{100000}}$. Pour avoir une première valeur approchée, négligez la fraction qui accompagne 3, et vous aurez $\frac{1}{3}$ pour première valeur approchée, mais un peu trop forte.

Pour avoir une valeur plus approchée, divisez le numérateur et le dénominateur de la fraction qui accompagne 3, chacun par le numérateur de cette fraction, et vous aurez $\frac{1}{3\frac{1}{7\frac{887}{14159}}}$; négligez la fraction qui accompagne 7, et vous aurez $\frac{1}{3\frac{1}{7}}$, ou (86) $\frac{1}{\frac{22}{7}}$, ou (109) $\frac{7}{22}$ pour seconde valeur, qui est plus approchée que la première, mais un peu trop faible.

Pour avoir une valeur encore plus approchée, divisez le numérateur et le dénominateur de la fraction qui accompagne 7, chacun par le numérateur de cette fraction, vous aurez $\frac{1}{3\frac{1}{7\frac{1}{15\frac{854}{887}}}}$ supprimez la fraction qui accompagne 15, et vous aurez $\frac{1}{3\frac{1}{7\frac{1}{15}}}$ qui revient à $\frac{106}{333}$, valeur plus approchée, mais un peu trop forte.

Pour avoir une valeur encore plus approchée, divisez les deux termes de la fraction qui accompagne 15 chacun par le numérateur 854, et vous aurez

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{\frac{33}{854}}}}$$

, négligeant la fraction $\frac{33}{854}$, vous aurez pour valeur plus approchée $\frac{113}{355}$, mais qui est un peu trop faible. On voit, à présent, comment on peut continuer.

Des Nombres complexes.

116. Quoique les règles que nous avons exposées jusqu'ici puissent servir aussi à calculer les nombres complexes, nous croyons cependant devoir considérer ceux-ci d'une manière plus particulière, parce que la division qu'on y fait de l'unité principale, en facilite souvent le calcul.

Il y a plusieurs sortes de nombres complexes, et les règles pour les calculer tiennent beaucoup à la division qu'on a faite de l'unité : cependant il n'est pas nécessaire d'examiner toutes ces espèces, pour être en état de les calculer ; mais il importe de savoir quels rapports leurs différentes parties ont, tant entre elles, qu'à l'égard de l'unité principale ; c'est par cette raison que nous donnons ici une table des nombres complexes dont l'usage est le plus fréquent.

Table des unités de quelques espèces, et caractères par lesquels on représente ces différentes unités.

POUR LES MONNAIES.

₶ signifie.....	livre.	1 livre vaut.....	20 sous.
ſ	sou.	1 sou vaut.....	12 den.

POUR LES POIDS.

℔ signifie.....	livre.	1 livre (poids) vaut....	2 marcs.
M.....	marc.	1 marc.....	8 onces.
O.....	once.	1 once.....	8 gros.
G.....	gros.	1 gros.....	3 deniers ou scrupules.
D.....	denier ou scrupule.	1 denier.....	24 grains.
ℊ.....	grains.		

POUR L'ÉTENDUE DES LIGNES.

T signifie.....	toise.	1 toise vaut.....	6 pieds.
P.....	pied.	1 pied.....	12 pouces.
p.....	pouce.	1 pouce.....	12 lignes.
l.....	ligne.	1 ligne.....	12 points.
pt.....	point.		

POUR LE TEMPS.

J signifie.....	jour.	1 jour vaut.....	24 heures.
H.....	heure.	1 heure.....	60 minutes.
'.....	minute.	1 minute.....	60 secondes.
".....	seconde.	1 seconde.....	60 tierces.

Nous donnerons en Géométrie les divisions des mesures relatives aux superficies et aux capacités des corps.

Addition des Nombres complexes.

117. Pour faire cette opération, on écrit tous les nombres proposés les uns au-dessous des autres, de manière que toutes les parties d'une même espèce se trouvent chacune dans une même colonne verticale; et après avoir souligné le tout, on commence l'addition par les parties de l'espèce la plus petite: si leur somme ne compose pas une unité de l'espèce immédiatement supérieure, on l'écrit sous les unités de son espèce; si elle renferme assez de parties pour composer une ou plusieurs unités de l'espèce immédiatement supérieure, on n'écrit au-dessous de cette colonne, que l'excédant d'un nombre juste d'unités de cette seconde espèce, sur lesquelles on procède de la même manière.

EXEMPLE I.

On propose d'ajouter....	227#	14ſ	8d
	2549	18	5
	184	11	11
	17	10	7
	2979#	15ſ	7d somme.

La somme des deniers est 31, qui renferme deux douzaines de deniers, ou 2 sous et 7 deniers; je pose les 7 deniers, et je retiens 2 sous que j'ajoute avec les unités de sous, ce qui donne 15 sous, dont je pose seulement le chiffre 5, et je retiens la dixaine

pour l'ajouter aux dixaines ; ce qui me donne 5 ; et comme il faut deux dixaines de sous pour faire une livre, je prends la moitié de 5 qui est 2, avec 1 pour reste ; je pose ce reste, et je porte les 2 livres à la colonne des livres, que j'ajoute comme à l'ordinaire.

EXEMPLE II.

On propose d'ajouter....	54^T	2^P	3p	9l
	15	5	4	11
	9	4	11	11
	5	2	9	10
	85^T	3^P	6p	5l.

La somme des lignes monte à 41, qui font 3 pouces 5 lignes; je pose 5 lignes et je retiens les 3 pouces que j'ajoute avec les pouces ; le tout me donne 30, qui valent 2 pieds 6 pouces ; je pose les 6 pouces, et je retiens les deux pieds qui, ajoutés avec les pieds, me donne 15 pieds qui valent 2^T 3^P ; je pose les 3^P, et j'ajoute les deux toises avec les toises : le tout monte à 85, ensorte que la somme est 85^T 3^P 6^P 5^l.

Soustraction des Nombres complexes.

118. Écrivez les nombres proposés, comme dans l'addition, et commencez la soustraction par les unités de l'espèce la plus basse. Si le nombre inférieur peut être retranché du nombre supérieur, écrivez le reste au-dessous. S'il ne peut être retranché, empruntez sur l'espèce immédiatement supérieure, une unité que vous réduirez à l'espèce dont il s'agit, et que vous ajouterez au nombre dont vous ne pouvez retrancher. Faites la même chose pour chaque espèce, et lorsque vous aurez été obligé d'emprunter, diminuez d'une unité le nombre sur lequel vous avez fait cet emprunt. Enfin, écrivez chaque reste, à mesure que vous le trouverez, au-dessous du nombre qui l'a donné.

EXEMPLE I.

De.....	$143^{\#}$	17^{s}	6^{d}
on veut ôter.....	$75^{\#}$	12^{s}	9^{d}
reste.....	$68^{\#}$	4^{s}	9^{d}

Ne pouvant ôter 9^d de 6^d, j'emprunte 1^s, qui vaut 12^d, et

5..

6 font 18, desquels ôtant 9, il reste 9; j'ôte ensuite 12^{s}, non pas de 17^{s}, mais de 16 qui restent après l'emprunt, et il reste 4; enfin je retranche 75 liv. de 143 liv., et il me reste 68 liv.

EXEMPLE II.

De.....	163#	0^{s}	5^{d}
on veut ôter.....	84#	8^{s}	9^{d}
reste.....	78#	11^{s}	8^{d}

Comme je ne puis pas ôter 9^{d} de 5^{d}, et que d'ailleurs il n'y a pas de sous sur lesquels je puisse emprunter, j'emprunte 1 liv. sur 163 liv.; mais j'en laisse, pour la pensée, 19 sous à la place du zéro, après quoi j'opère comme ci-dessus.

Multiplication des Nombres complexes.

119. On peut réduire généralement la multiplication des nombres complexes, à la multiplication d'une fraction par une fraction, multiplication dont nous avons donné la règle (106). Par exemple, si l'on demande ce que doivent coûter 54^{T}3^{P} d'ouvrage, à raison de 42 liv. 17 sous 8 den. la toise; on peut réduire le multiplicande 42 liv. 17 sous 8 den. tout en deniers (57), ce qui donnera 10292 deniers, et comme le denier est la 240e partie de la livre, le multiplicande peut être représenté par $\frac{10292}{240}$ de la livre; pareillement on réduira le multiplicateur 54^{T} 3^{P} tout en pieds, ce qui donnera 327^{P}, et comme le pied est la sixième partie de la toise, on aura pour multiplicateur $\frac{327}{6}$ de toise; ensorte que la question est réduite à multiplier $\frac{10292}{240}$ par $\frac{327}{6}$, ce qui (106) donnera $\frac{3365484}{1440}$ de livre qui (112) valent 2337 liv. 2 sous 10 den.

Cette méthode s'étend à toute espèce de nombres complexes, mais elle exige plus de calcul que celle que nous allons exposer, c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas davantage.

120. Un nombre qui est contenu exactement dans un autre, est dit partie *aliquote* de cet autre : ainsi 3 est partie aliquote de 12, il en est de même de 2, de 4 et de 6.

Rappelons-nous que multiplier n'est autre chose que prendre le multiplicande un certain nombre de fois ; multiplier par $8\frac{3}{4}$, par exemple, c'est prendre le multiplicande 8 fois, et le prendre encore $\frac{3}{4}$ de fois, ou en prendre les $\frac{3}{4}$. Or, on peut prendre ces $\frac{3}{4}$ ou en prenant d'abord le quart, et l'écrivant 3 fois, ou bien en prenant d'abord la moitié, et ensuite la moitié de cette moitié : ainsi, pour multiplier 84 par $8\frac{3}{4}$,

j'écrirais.....

$$\begin{array}{r} 84 \\ 8\frac{3}{4} \\ \hline 672 \\ 42 \\ 21 \\ \hline 735 \text{ produit.} \end{array}$$

En multipliant 84 par 8, j'aurais d'abord 672. Ensuite pour prendre les $\frac{3}{4}$ de 84, je prendrais d'abord la moitié qui est 42 ; puis, pour prendre pour le quart restant, je prendrais la moitié de 42 qui est 21, et, réunissant ces trois produits particuliers, j'aurais 735 pour le produit total.

121. Pour appliquer ceci aux nombres complexes, il faut remarquer que les différentes espèces d'unités au-dessous de l'unité principale, sont des fractions les unes à l'égard des autres, et à l'égard de cette unité principale ; que par conséquent, pour multiplier facilement par ces sortes de nombres, il faut faire ensorte de les décomposer en parties aliquotes de l'unité principale, de manière que ces parties aliquotes puissent être employées commodément ; ou de les décomposer en parties aliquotes les unes des autres ; et si cette décomposition ne fournit que des parties aliquotes qui ne soient pas commodes dans le calcul, on y suppléera par de faux produits ; c'est ce que nous allons développer dans les exemples suivans.

EXEMPLE I.

On demande combien doivent coûter $54^T\ 2^P$, à raison de 72 liv. la toise.

Il faut multiplier.....	72#		
par.....	54^T	3^P	
	288#	0s	0d
	3600		
	36		
	3924#	0s	0d

On multipliera d'abord, selon les règles ordinaires, 72 liv. par 54. Ensuite pour multiplier par 3^P, qui sont la moitié de la toise, et qui par conséquent ne doivent donner que la moitié du prix de la toise, on prendra la moitié de 72 liv., et additionnant, on aura 3924 liv. pour produit total.

EXEMPLE II.

Si l'on avait.....	72#		
à multiplier par.....	54^T	5^P	
	288#	0s	0d
	3600		
	36		
	24		
	3948#	0s	0d

On multipliera d'abord 72 liv. par 54. Ensuite au lieu de multiplier par $\frac{5}{6}$, parce que 5 pieds font les $\frac{5}{6}$ de la toise, on décomposera 5^P, en 3^P et 2^P, dont le premier est la moitié, et le second le $\frac{1}{3}$ de la toise; on prendra donc d'abord la moitié de 72 liv., et ensuite le $\frac{1}{3}$ de 72 liv., et on aura, en réunissant tous ces produits particuliers, 3948 liv. pour produit total.

EXEMPLE III.

Que l'on ait.....	72#		
à multiplier par.....	5T	4P	8p
	360#	0S	0D
	36		
	12		
	4		
	4		
	416#	0S	0D

Après avoir multiplié par 5T, on multipliera par 4P, et pour cet effet, on décomposera ce nombre en 3P et 1P; pour 3P on prendra la moitié de 72 livres, qui est 36 liv.; et pour 1 pied, on remarquera que c'est le $\frac{1}{3}$ de 3 pieds, et par conséquent on on prendra le $\frac{1}{3}$ de 36 liv., qui est de 12 liv. Ensuite, pour multiplier par 8 pouces, au lieu de comparer ces 8 pouces à la toise, on les comparera au pied, et on les décomposera en 4 pouces, et 4 pouces qui sont chacun le $\frac{1}{3}$ du pied, et par conséquent donneront chacun le $\frac{1}{3}$ de 12 liv. Enfin réunissant, on aura 416 liv. 0 sous 0 den. pour produit.

122. Si le multiplicande est aussi un nombre complexe, on se conduira comme il va être expliqué dans l'exemple suivant.

EXEMPLE IV.

Si l'on a.....	72#	6S	6D
à multiplier par.....	27T	4P	8p
	504#	0S	0D
	1440		
	6	15	0
	1	7	0
	0	13	6
	36	3	3
	12	1	1
	4	0	$4\frac{1}{3}$
	4	0	$4\frac{1}{3}$
	2009#	0S	$6D\frac{2}{3}$

On multipliera d'abord 72 liv. par 27. Ensuite pour multiplier 6 sous par 27, on décomposera ces 6 sous en 5 sous et 1 sou. Les 5 sous faisant le quart de la livre, doivent, étant multipliés par 27 donner 27 fois le quart de la livre ou le quart de 27 liv.; on prendra donc le quart de 27 liv. qui est 6 liv. 15 sous. Pour multiplier 1 sou par 27, on remarquera qu'un sou est la cinquième partie de 5 qu'on vient de multiplier; ainsi on prendra le cinquième des 6 liv. 15 sous, qui sera 1 liv. 7 sous.

A l'égard des 6 deniers, on fera attention qu'ils sont la moitié d'un sou, et par conséquent on prendra la moitié de 1 liv. 7 sous qu'on a eue pour 1 sou.

Jusques-là tout le multiplicande est multiplié par 27.

Pour multiplier par 4 pieds, on s'y prendra de la même manière que dans l'exemple précédent, c'est-à-dire que pour les 4^P on prendra d'abord pour 3^P la moitié de 36 liv. 3 sous 3 den. du multiplicande, et pour 1^P le tiers de ce que donnent les 3^P.

Enfin, pour 8^P on prendra 2 fois pour 4, c'est-à-dire qu'on écrira 2 fois le tiers de ce qu'on vient d'avoir pour 1^P: en réunissant toutes ces différentes parties, on aura 2009 liv. 0 sou 6 d. $\frac{2}{3}$ pour produit total.

123. Jusqu'ici les parties du multiplicande qu'il a fallu prendre ont été assez faciles à évaluer; mais dans les cas où ces parties seraient plus composées, on se conduirait comme dans l'exemple suivant.

EXEMPLE V.

A raison de.....	$34^{\#}$	10^{s}	2^{d} la toise,	
combien doivent coûter.....	17^{T}			
	$238^{\#}$	0^{s}	0^{d}	
	340			
	8	10		
	~~0~~	~~17~~		
	0	2	10	
	$586^{\#}$	12^{s}	10^{d}	

Après avoir multiplié 34 liv. par 17, et ensuite les 10 sous par 17 en prenant moitié de 17, on multipliera 2 deniers qui sont la sixième partie d'un sou, et par conséquent la sixième partie de la dixième partie ou (114) la 60e partie de 10 sous; mais au lieu de prendre la 60e partie de 8 liv. 10 sous, il sera plus commode de faire un faux produit, et de prendre d'abord le dixième de ce qu'ont donné 10 sous, c'est-à-dire le dixième de 8 liv. 10 sous; ce dixième qui est 0 liv. 17 sous, est pour 1 sou; mais comme il ne faut que pour le sixième d'un sou, on barrera ce faux produit, et on écrira le sixième au-dessous.

EXEMPLE VI.

Combien pour 34 liv. 10 sous 2 den. fera-t-on faire d'ouvrage à raison de 1 liv. pour 17 toises?

Il faut multiplier 17 toises par 34 liv. 10 sous 2 den., c'est-à-dire prendre 17 toises autant de fois que la livre est contenue dans 34 liv. 10 sous 2 den.

17^{T}					
$34^{\#}$	10^{s}	2^{d}			
68^{T}	0^{P}	0^{P}	0^{l}	0^{pts}	
510					
8	3				
~~0~~	~~8~~	~~1~~	~~2~~	~~4~~	$\frac{4}{8}$
0	0	10	2	4	$\frac{4}{5}$
586^{T}	3^{P}	10^{P}	2^{l}	4^{pts}	$\frac{4}{5}$

Ainsi on multipliera d'abord 17 toises par 34; ensuite, pour multiplier 17 toises par 10 sous, on prendra la moitié de 17 toises, parce que 10 sous sont la moitié de la livre, et on aura 8 toises 3 pieds. Pour multiplier par 2 deniers, on cherchera, pour plus de facilité, ce que donnerait un sou, en prenant le dixième de ce qu'ont donné 10 sous; ce dixième est 0 toises 5

pieds 1 pouce 2 lignes 4 points et $\frac{8}{10}$ ou $\frac{4}{5}$ de point; on le barrera, comme ne devant pas faire partie du produit, mais on en prendra le sixième pour avoir le produit de 2 deniers, et on écrira au-dessous ce sixième qui est 0 toises, 0 pieds 10 pouces 2 lignes 4 points et $\frac{24}{30}$ ou $\frac{4}{5}$.

Nous avons donné cet exemple, principalement pour confirmer ce que nous avons dit (45), qu'il importait de distinguer le multiplicande du multiplicateur, lorsqu'ils sont tous les deux concrets. En effet, dans l'exemple précédent, ainsi que dans celui-ci, les facteurs du produit sont également 17 toises et 34 livres 10 sous 2 deniers; cependant les deux produits sont différens.

Division d'un Nombre complexe par un Nombre incomplexe.

124. Si le dividende seul est complexe, et si en même temps le dividende et le diviseur ont des unités de différente espèce, on divisera d'abord les unités principales du dividende, selon la règle ordinaire; ce qui restera de cette division, on le réduira (57) en unités de la seconde espèce, qu'on ajoutera avec celles de même espèce qui se trouveront dans le dividende, et on divisera le tout comme à l'ordinaire : on réduira pareillement le reste de cette division en unités de la troisième espèce, auxquelles on ajoutera celles de la même espèce qui se trouveront dans le dividende, et on divisera le tout comme ci-dessous; on continuera de réduire les restes en unités de l'espèce suivante, tant qu'il s'en trouvera d'inférieures dans le dividende.

EXEMPLE.

On a donné 4783 livres 3 sous 9 deniers pour paiement de 87 toises d'ouvrage; on demande à combien cela revient la toise?

4783# 3ˢ 9ᵈ	87
433	54# 19ˢ 7ᵈ
85	
1703	
833	
50	
609ᵈ	
000	

Il faut diviser 4783 livres 3 sous 9 deniers par 87, en commençant par les livres.

Les 4783 livres divisées par 87, selon la règle ordinaire, donneront 54 livres pour quotient, et 85 livres pour reste : ces 85 livres réduites en sous (57), donneront avec les 3 sous du dividende 1703 sous, qui, divisés par 87, donneront 19 sous pour quotient, et 50 sous pour reste : ces 50 sous réduits en deniers, donnent, avec les 9 deniers du dividende, 609 deniers, lesquels divisés par 87, donnent enfin 7 deniers pour quotient.

125. Mais si le dividende et le diviseur ont des unités de même espèce, il faut, avant de faire la division, examiner si le quotient doit être ou ne pas être de même espèce qu'eux, ce que l'état de la question décide toujours.

126. Dans le cas où le dividende ou le diviseur étant de même espèce, le quotient devra aussi être de même espèce qu'eux, la division se fera précisément comme dans le cas précédent; par exemple, si l'on proposait cette question : 1243 liv. ont produit un bénéfice de 7254 livres, à combien cela revient-il par livre ? Il est évident que le quotient doit avoir des unités de même espèce que le dividende et le diviseur, c'est-à-dire, doit être des livres, et qu'on doit diviser 7254 livres par 1243, en réduisant, comme dans l'exemple précédent, le reste de cette division en sous, et le second reste en deniers, et on trouvera 5 livres 16 sous 8 deniers $\frac{760}{1243}$ pour réponse à la question.

127. Mais lorsque le dividende et le diviseur étant de

même espèce, le quotient devra être d'espèce différente, alors il faudra commencer par réduire (67) le dividende et le diviseur chacun à la plus petite espèce qui soit dans le dividende; après quoi on fera la division comme dans le cas précédent, et on y traitera les unités du dividende, comme si elles étaient de même espèce que celle que doit avoir le quotient : par exemple, si l'on proposait cette question, combien pour 7954 livres 11 sous 8 deniers fera-t-on faire d'ouvrage, à raison de 72 liv. la toise ? Il est clair, par la nature de la question, que le quotient doit être des toises et parties de toise. On réduira donc 7954 livres 11 sous 8 deniers tout en deniers, ce qui donnera 1909099 ; on réduira pareillement 72 livres en deniers, et on aura 17280; on divisera 1909099 considérés comme des toises, par 17280, et on aura pour quotient 110 toises 2 pieds 10 pouces 6 lignes $\frac{19}{20}$.

Division d'un Nombre complexe par un Nombre complexe.

128. Lorsque le diviseur est aussi un nombre complexe, il faut le réduire à sa plus petite espèce (57), multiplier le dividende par le nombre qui exprime combien il faut de parties de la plus petite espèce du diviseur pour composer l'unité principale de ce même diviseur; alors la division sera réduite au cas précédent où le diviseur était incomplexe.

EXEMPLE.

57 toises 5 pieds 5 pouces d'ouvrage ont été payés 854 livres 17 sous 11 deniers; on demande à combien cela revient la toise ? il faut diviser 854 livres 17 sous 11 deniers par 57 toises 5 pieds 5 pouces, et pour cet effet je réduis les 57 toises 5 pieds 5 pouces en pouces, ce qui me donne 4169 pour nouveau diviseur; et, comme il faut 72 pouces pour faire la toise, qui est l'unité principale du diviseur, je multiplie le dividende proposé 854 livres 17 sous 11 deniers par 72 (121), ce qui me donne

61552 livres 10 sous pour nouveau dividende, ensorte que je divise comme il suit :

61552# 10s	4169
19862	14# 15s 3d $\frac{1833}{4169}$
3186	
63730s	
22040	
1195	
14340	
1833	

Les 61552 livres divisées par 4169 donnent 14 livres pour quotient, et 3186 pour reste. Ces 3186 livres réduites en sous, donnent avec les 10 sous du dividende, 63730 sous, qui divisés par 4169, donnent 15 sous pour quotient, et 1195 sous de reste. Ces 1195 sous réduits en deniers valent 14340 deniers, lesquels, divisés par 4169, donnent 3 deniers pour quotient, et 1833 deniers pour reste : ensorte que le quotient est 14 livres 15 sous 3 deniers $\frac{1833}{4189}$ de denier.

Pour entendre la raison de cette règle, il faut faire attention que les 37 toises 5 pieds 5 pouces valent 4169 pouces, et le pouce étant la soixante-douzième partie de la toise, le diviseur est $\frac{4169}{72}$ de la toise ; or, pour diviser par une fraction, il faut (109) renverser la fraction diviseur, et multiplier ensuite par cette fraction ainsi renversée ; il faut donc ici multiplier par $\frac{72}{4169}$; ce qui revient à multiplier d'abord par 72, et à diviser ensuite par 4169, ainsi que le prescrit la règle que nous donnons.

Comme la division par un nombre complexe se réduit, ainsi qu'on vient de le voir, à la division par un nombre incomplexe, on doit avoir les mêmes attentions à l'égard de la nature des unités que nous avons eues (126) et (127).

Ce serait ici le lieu de parler du toisé ou de la multiplication et de la division géométriques : ces opérations ne diffèrent en rien pour le procédé, de celles que nous venons d'exposer ;

ensorte qu'il n'y aurait ici d'autre chose à ajouter, que d'expliquer quelle est la nature des unités des facteurs et du produit; mais cela appartient à la Géométrie. Nous remettrons donc à en parler, jusqu'à ce que nous soyons arrivés à la Géométrie.

De la formation des Nombres carrés; et de l'extraction de leurs racines.

129. On appelle *carré* d'un nombre, le produit qui résulte de la multiplication de ce nombre par lui-même; ainsi 25 est le carré de 5, parce que 25 résulte de la multiplication de 5 par 5.

130. La *racine carrée* d'un nombre proposé, est le nombre qui, multiplié par lui-même, reproduirait ce même nombre proposé : ainsi 5 est la racine carrée de 25; 7 est la racine carrée de 49.

131. Un nombre que l'on carre est donc tout à la fois multiplicande et multiplicateur; il est donc deux fois facteur (42) du produit; c'est pour cela qu'on appelle aussi ce produit ou carré la *seconde puissance* de ce nombre.

Il ne faut d'autre art pour carrer un nombre, que de le multiplier par lui-même selon les règles ordinaires de la multiplication; mais pour extraire la racine carrée d'un nombre, c'est-à-dire, pour revenir du carré à la racine, il faut une méthode, du moins lorsque le nombre ou carré proposé a plus de deux chiffres.

Lorsque le nombre proposé n'a qu'un ou deux chiffres, sa racine, en nombre entier, est quelqu'un des nombres.....

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

dont les carrés sont

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Ainsi la racine carrée de 72, par exemple, est 8 en nombre entier, parce que 72 étant entre 64 et 81, sa racine est entre les racines de ceux-ci, c'est-à-dire entre 8 et 9, et elle est 8 et une fraction; fraction qu'à la vérité on ne peut pas assigner

exactement, mais dont on peut approcher continuellement, ainsi que nous le verrons dans peu.

132. La racine carrée d'un nombre qui n'est point un carré parfait s'appelle, un nombre *sourd* ou *irrationel* ou *incommensurable*.

133. Venons aux nombres qui ont plus de deux chiffres.

C'est en observant ce qui se passe dans la formation du carré, que nous trouverons la méthode qu'on doit suivre pour revenir à la racine.

Pour carrer un nombre tel que 54, par exemple :

$$\begin{array}{r} 54 \\ 54 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array}$$

Après avoir écrit le multiplicande et le multiplicateur, comme on le voit ici, nous multiplions, comme à l'ordinaire, le 4 supérieur par le 4 inférieur, ce qui fait évidemment le *carré des unités*.

Nous multiplierons ensuite le 5 supérieur par le 4 inférieur, ce qui fait le *produit des dixaines par les unités*.

Nous passons après cela au second chiffre du multiplicateur, et nous multiplions le 4 supérieur par le 5 inférieur, ce qui fait le produit des unités par les dixaines, ou (44) *le produit des dixaines par les unités*.

Enfin nous multiplions le 5 supérieur par le 5 inférieur, ce qui *fait le carré des dixaines*.

Nous ajoutons ces produits, et nous avons pour carré le nombre 2916, que nous voyons donc être composé *du carré des dixaines, plus deux fois le carré des dixaines par les unités, plus le carré des unités* du nombre 54.

134. Ce que nous venons d'observer étant une conséquence immédiate des règles de la multiplication, n'est pas plus particulier au nombre 54 qu'à tout autre nombre composé de dixaines et d'unités ; ensorte qu'on peut dire généralement que

le carré de tout nombre composé de dixaines et d'unités, renfermera les trois parties que nous venons d'énoncer ; savoir le carré des dixaines de ce nombre, deux fois le produit des dixaines par les unités, et le carré des unités.

135. Cela posé, comme le carré des dixaines est des centaines (puisque 10 fois 10 font 100), il est visible que ce carré des dixaines ne peut faire partie des deux derniers chiffres du carré total.

Pareillement le produit du double des dixaines multipliées par les unités, étant nécessairement des dixaines, ne peut faire partie du dernier chiffre du carré total.

136. Donc pour revenir du carré 2916 à sa racine, on peut raisonner ainsi :

EXEMPLE I.

```
2916 | 54 racine.
 416
 104
 ---
 000
```

Commençons par trouver les dixaines de cette racine : or, la formation du carré nous apprend qu'il y a dans 2916 le carré de ces dixaines, et que ce carré ne peut faire partie de ces deux derniers chiffres ; il est donc dans 29 ; et comme la racine carrée de 29 ne peut être plus de 5, concluons-en que le nombre des dixaines de la racine est 5, et portons-le à côté de 2916, comme on le voit ci-dessus.

Je carre 5, et je retranche le produit 25 de 29 ; il me reste 4, à côté duquel j'abaisse les deux autres chiffres 16 du nombre proposé 2916.

Pour trouver maintenant les unités de la racine, je fais attention à ce que renferme le reste 416 ; il ne contient plus que deux parties du carré, savoir : le double des dixaines de la racine, multipliées par les unités, et le carré des unités de cette même racine. De ces deux parties, la première suffit pour nous faire trouver les unités que nous cherchons ; car puisqu'elle est formée du double des dixaines multipliées par les unités, si on

la divise par le double des dixaines que nous connaissons, elle doit (74) donner pour quotient les unités : il ne s'agit donc plus que de savoir dans quelle partie de 416 est renfermé ce double des dixaines multipliées par les unités ; or, nous avons remarqué ci-dessus qu'il ne pouvait faire partie du dernier chiffre ; il est donc dans 41 ; il faut donc diviser 41 par le double 10 des dixaines trouvées ; j'écris donc sous 41 le double 10 des dixaines, et faisant la division, le quotient 4 que je trouve est le nombre des unités que je porte à la droite des 5 dixaines trouvées, ensorte que la racine cherchée est 54.

Mais il faut observer que quoique le quotient 4 que nous venons de trouver, soit en effet celui qui convient, cependant il peut arriver quelquefois que le quotient trouvé de cette manière, soit plus fort qu'il ne convient; parce que 41 (c'est-à-dire la partie qui reste après la séparation du dernier chiffre) renferme non-seulement le double des dixaines multipliées par les unités; mais encore les dixaines provenant du carré des unités ; c'est pourquoi, pour n'avoir aucun doute sur le chiffre des unités, il faut employer la vérification suivante.

Après avoir trouvé le chiffre 4 des unités, et l'avoir écrit à la racine, je le porte à côté du double 10 des dixaines, ce qui fait 104, dont je multiplie successivement tous les chiffres par le même nombre 4, et je retranche les produits successifs des parties correspondantes de 416; comme il ne reste rien, j'en conclus que la racine est en effet 54.

S'il restait quelque chose, la racine n'en serait pas moins la vraie racine en nombres entiers ; à moins que ce reste ne fût plus grand que le double de la racine, augmenté de l'unité; mais c'est ce qu'on n'a point à craindre, quand on prend le quotient toujours au plus fort.

La vérification que nous venons d'enseigner, est fondée sur la formation même du carré; car, quand on multiplie 104 par 4, il est évident qu'on forme le carré des unités et le double des dixaines multiplié par les unités, c'est-à-dire qui complète le carré parfait.

137. De ce que nous venons de dire, il faut conclure que

pour extraire la racine carrée d'un nombre qui n'a pas plus de quatre chiffres, ni moins de trois, il faut, après en avoir séparé deux sur la droite, chercher la racine carrée de la tranche qui reste à gauche; cette racine sera le nombre des dixaines de la racine totale cherchée, et on l'écrira à côté du nombre proposé, en l'en séparant par un trait.

On soustraira de cette même tranche le carré de la racine qu'on vient de trouver; et après avoir écrit le reste au-dessous de cette tranche, on abaissera à côté de ce reste les deux chiffres qu'on avait séparés.

On séparera par un point le chiffre des unités de la tranche qu'on vient d'abaisser, et on divisera ce qui se trouve sur la gauche, par le double des dixaines, qu'on écrira au-dessous.

On écrira le quotient à côté du premier chiffre de la racine, et on le portera ensuite à côté du double des dixaines qui a servi de diviseur.

Enfin on multipliera par ce même quotient tous les chiffres qui se trouvent sur cette dernière ligne, et on retranchera leurs produits, à mesure qu'on les trouvera, des chiffres qui leur correspondent dans la ligne au-dessus.

Achevons d'éclaircir ceci par un exemple.

EXEMPLE II.

On demande la racine carrée de 7569.

```
75.69 | 87 racine.
116.9
 167
 ---
 000
```

Je sépare les deux chiffres 69, et je cherche la racine carrée de 75; elle est 8; j'écris 8 à côté; je carre 8, et je retranche de 75 le carré 64; il me reste 11 que j'écris au-dessous de 75, et j'abaisse à côté de ce même 11, les chiffres 69 que j'avais séparés.

Je sépare, dans 1169, le dernier chiffre 9, pour avoir dans 116 la partie que je dois diviser pour trouver les unités.

Je forme mon diviseur, en doublant les 8 dixaines que j'ai trouvées, et j'écris ce diviseur au-dessous de 116, la division me donne pour quotient 7 que j'écris à la racine, à la droite de 8.

Je porte aussi ce quotient à côté du diviseur 16; je multiplie 167 qui forme la dernière ligne, par ce même quotient 7, et je retranche les produits, à mesure que je les trouve, de 1169 : il ne reste rien, ce qui prouve que 7569 est un carré parfait, et le carré de 87.

138. Il faut bien remarquer qu'on ne doit diviser par le double des dixaines, que la seule partie qui reste à gauche, après qu'on a séparé le dernier chiffre, ensorte que si elle ne contenait pas le double des dixaines, il ne faudrait pas pour cela employer le chiffre séparé; on mettrait 0 à la racine. Si au contraire on trouvait que le double des dixaines y est plus de 9 fois, on ne mettrait cependant pas plus de 9; la raison en est la même que pour la division (66).

139. Après avoir bien compris ce que nous venons de dire sur la racine carrée des nombres qui n'ont pas plus de 4 chiffres, on saisira facilement ce qui convient de faire lorsque le nombre des chiffres est plus grand. De quelque nombre de chiffres que la racine doive être composée, on peut toujours la concevoir composée de deux parties, dont l'une soit des dixaines et l'autre des unités; par exemple, 874 peut être considéré comme représentant 87 dixaines et 4 unités.

Cela posé, quand on a trouvé les deux premiers chiffres de la racine, par la méthode qu'on vient d'exposer, on peut aussi trouver le troisième par la même méthode, en considérant ces deux premiers chiffres comme ne faisant qu'un seul nombre de dixaines, et leur appliquant, pour trouver le troisième, tout ce qui a été dit du premier pour trouver le second.

Pareillement, quand on aura trouvé les trois premiers chiffres, s'il doit y en avoir un quatrième, on considérera les trois premiers comme ne faisant qu'un seul nombre de dixaines, auquel on appliquera, pour trouver le quatrième, le même raisonnement qu'on appliquait aux deux premiers pour trouver le troisième, et ainsi de suite.

Mais pour procéder avec ordre, il faut commencer par partager le nombre proposé en tranches, de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche; la dernière pourra n'en contenir qu'un.

La raison de cette préparation est fondée sur ce que considérant la racine comme composée de dixaines et d'unités, il faut, suivant ce qui a été dit ci-dessus (155 et suiv.), commencer par séparer les deux derniers chiffres sur la droite, pour avoir, dans la partie qui reste à gauche, le carré des dixaines; mais comme cette partie est elle-même composée de plus de deux chiffres, un raisonnement semblable conduit à en séparer encore deux sur la droite, et ainsi de suite.

Donnons un exemple de cette opération.

EXEMPLE III.

On demande la racine carrée de 76807696.

```
76.80.76.96 | 8764
128.0
 167
 ----
 1127.8
  174 8
 ------
   7009.6
   1760 4
 ------
   0000 0
```

Après avoir partagé le nombre proposé en tranches de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche, je cherche quelle est la racine carrée de la tranche 76 qui est le plus à gauche : je trouve qu'elle est 8, et j'écris 8 à côté du nombre proposé : je carre 8, et je retranche le carré 64 de 76 : j'ai pour reste 12 que j'écris au-dessous de 76; à côté de ce reste j'abaisse la tranche 80 dont je sépare le dernier chiffre par un point; et au-dessous de la partie 128, j'écris 16, double de la racine trouvée; puis disant, en 128 combien de fois 16 ? je trouve qu'il y est 7 fois; j'écris 7 à la suite de la racine 8, et à côté du double 16; je multiplie 167 par ce même nombre 7, et je

retranche de 1280 le produit de cette multiplication; il me reste 111 à côté duquel j'abaisse la tranche 76, ce qui forme 11176 ; je sépare le dernier chiffre 6 de ce nombre, et sous la partie 1117 qui reste à gauche, j'écris 174, double de la racine 87; je divise 1117 par 174, et ayant trouvé 6 pour quotient, j'écris 6 à la racine et à côté du double 174 : je multiplie 1746 par ce même nombre 6, et je retranche 10476 de 11176, il reste 700; à côté de ce reste j'abaisse 96 dont je sépare le dernier chiffre; au-dessous de 7009, qui reste à gauche, j'écris 1752, double de la racine trouvée 876; et divisant 7009 par 1752, je trouve pour quotient 4 que j'écris à la racine et à côté du double 1752. Je multiplie 17524 par ce même nombre 4, et je retranche de 70096, il ne reste rien; ainsi la racine carrée de 76807696 est exactement 8764.

140. Lorsque le nombre proposé n'est point un carré parfait, il y a un reste à la fin de l'opération, et la racine carrée qu'on a trouvée est la racine carrée du plus grand carré contenu dans le nombre proposé : alors il n'est pas possible d'extraire la racine carrée exactement; mais on peut en approcher si près qu'on le juge à propos, c'est-à-dire, de manière que l'erreur qui en résulterait dans le carré, soit au-dessous de telle quantité qu'on voudra.

Cette approximation se fait commodément par le moyen des décimales. Il faut concevoir à la suite du nombre proposé, deux fois autant de zéros qu'on voudra avoir de décimales à la racine; faire l'opération comme à l'ordinaire, et séparer ensuite par une virgule, sur la droite de la racine, moitié autant de décimales qu'on a mis de zéros à la suite du nombre proposé. En effet, (54) le produit de la multiplication devant avoir autant de décimales qu'il y en a dans les deux facteurs ensemble, le carré (dont les deux facteurs sont égaux) doit donc en avoir le double de ce qu'a l'un des facteurs; c'est-à-dire, le double de ce que doit avoir la racine.

EXEMPLE IV.

On demande la racine carrée de 87567 à moins d'un n lième près.

Pour faire des millièmes, il faut trois décimales ; il faut d mettre six zéros au carré de 87567 ; ainsi il faut tirer la rac carrée de 87567000000.

```
8.75.67.00.00.00 | 295917
47.5
 4.9
 ----------
 346.7
  58 5
 ----------
  5420.0
  590 9
 ----------
   10190.0
    5918 1
 ----------
     427190.0
      59182 7
 ----------
       12911 1
```

En faisant l'opération comme dans les exemples précéde on trouve pour racine carrée, à moins d'une unité près nombre 295917 ; cette racine est celle de 87567000000 ; n comme il s'agit de celle de 87567 ou de 87567,000000 ; sépare moitié autant de décimales dans la racine, que j'ai de zéros au carré ; ce qui me donne 295,917 pour la ra carrée de 87567, à moins d'un millième près.

Pareillement, si l'on demande la racine carrée de 2 à m d'un dix-millième près, on tirera la racine carrée de 200000 qu'on trouvera être 14142 ; séparant les quatre chiffres de droite par une virgule, on aura 1,4142 pour la racine ca de 2 rapprochée, à moins d'un dix-millième près.

141. On a vu (106) que pour multiplier une fraction une fraction, il fallait multiplier numérateur par numérate et dénominateur par dénominateur ; par conséquent pour ca une fraction, il faut carrer le numérateur et le dénominate ainsi le carré de $\frac{2}{3}$ est $\frac{4}{9}$, celui de $\frac{4}{5}$ est $\frac{16}{25}$.

142. Donc réciproquement, pour tirer la racine carrée d'une fraction, il faut tirer la racine carrée du numérateur et celle du dénominateur; ainsi la racine carrée de $\frac{9}{16}$ est $\frac{3}{4}$, parce que celle de 9 est 3, et celle de 16 est 4.

143. Mais il peut arriver que le numérateur ou le dénominateur, ou tous les deux, ne soient point des carrés parfaits; s'il n'y a que le numérateur qui ne soit point un carré, on en tirera la racine approchée par la méthode qu'on vient d'exposer, et ayant tiré la racine du dénominateur, on la donnera pour dénominateur à la racine du numérateur; ainsi si l'on demande la racine de $\frac{2}{9}$, on tirera la racine approchée du numérateur 2 qu'on trouvera 1,4 ou 1,41 ou 1,414 ou 1,4142, etc., selon qu'on voudra en approcher plus ou moins; et comme la racine carrée de 9 est 3, on aura pour racine approchée de $\frac{2}{9}$, la quantité $\frac{1,4}{3}$ ou $\frac{1,41}{3}$ ou $\frac{1,414}{3}$ ou $\frac{1,4142}{3}$, etc.

Mais si le dénominateur n'est pas un carré, on multipliera les deux termes de la fraction par ce même dénominateur, ce qui ne changera rien à la valeur de la fraction, et rendra ce dénominateur carré; alors on opérera comme dans le cas précédent. Par exemple, si l'on demande la racine carrée de $\frac{3}{5}$, on changera cette fraction en $\frac{15}{25}$; tirant la racine carrée de 15 jusqu'à 3 décimales, par exemple, on aura 3,872; et comme la racine carrée de 25 est 5, la racine carrée de $\frac{15}{25}$ sera $\frac{3,872}{5}$.

144. Pour ne pas avoir plusieurs sortes de fractions à la fois, on réduira le résultat $\frac{3,872}{5}$, uniquement en décimales, en divisant 3,872 par 5, ce qui donnera 0,774 pour la racine de $\frac{3}{5}$, exprimée purement en décimales (99).

145. Enfin si l'on avait des entiers joints à des fractions, on réduirait ces entiers en fractions (86), et on opérerait comme il vient d'être dit pour une fraction. Ainsi, pour tirer la racine carrée de $8\frac{3}{7}$, on changerait $8\frac{3}{7}$ en $\frac{59}{7}$, et celle-ci (143) en $\frac{413}{49}$, dont on trouverait que la racine approchée est $\frac{20,297}{7}$ ou 2,899.

146. On peut aussi réduire en décimales la fraction qui accompagne l'entier ; mais il faut observer d'y employer un nombre de décimales pair et double de celui qu'on veut avoir à la racine; parce que le produit de la multiplication de deux nombres qui ont des décimales, devant avoir autant de décimales qu'il y en a dans les deux facteurs (54), le carré d'un nombre qui a des décimales, doit en avoir deux fois autant que ce nombre. En appliquant cette méthode à $8\frac{3}{7}$, on le transforme en 8,428571 (99) dont la racine est 2,903, comme ci-dessus.

147. Si l'on avait à tirer la racine carrée d'une quantité décimale, il faudrait avoir soin de rendre le nombre des décimales pair, s'il ne l'est pas ; ce qui se fera en mettant à la suite de ses décimales, 1, ou 3, ou 5, etc. zéros : cela n'en change pas la valeur (30). Ainsi, pour tirer la racine carrée de 21,935 à moins d'un millième près, je tire la racine carrée de 21,935000 qui est 4,683 ; c'est aussi celle de 21,935. On trouvera de même, que celle de 0,542 est à moins d'un millième près 0,736, et que celle de 0,0054 est à moins d'un millième près 0,073.

148. Quand on a trouvé, par la méthode qui vient d'être exposée, les trois premiers chiffres de la racine, on peut en avoir plusieurs autres avec plus de facilité et de promptitude, par la division seule, en cette manière.

Prenons pour exemple 763703556823 : je commence par chercher les trois premiers chiffres de la racine, par la méthode ci-dessus : je trouve 873 pour cette racine, et 1574 pour reste : je mets à côté de ce reste les deux chiffres 55, qui suivent la partie 763703 qui a donné les trois premiers chiffres. (Je mettrais les trois chiffres suivans, si j'avais quatre chiffres de la racine ; quatre si

j'en avais cinq et ainsi de suite.) Je divise 157455 que j'ai alors, par le double 1746 de la racine; je trouve pour quotient 90; ce sont deux nouveaux chiffres à mettre à la suite de la racine, qui par là devient 87390. Je carre cette racine, et je retranche son carré 7637012100 de la partie 7637035568 dont 87390 est la racine; il me reste 23468.

Si je veux avoir de nouveaux chiffres à la racine, comme j'en ai déjà cinq, je puis, par la seule division, en trouver 4; je mettrai, pour cet effet, à la suite du reste 23468 les deux chiffres restans 23 du nombre proposé et deux zéros, et divisant 2346823oo par le double 174780 de la racine trouvée, j'aurai 1342 pour les quatre nouveaux chiffres que je dois joindre à la racine; mais en partageant le nombre proposé, en tranches, de la manière qui a été dite ci-dessus, on voit que sa racine ne doit avoir que six chiffres pour les nombres entiers; donc cette racine est 873901,342, à moins d'un millième près.

On peut, le plus souvent, pousser chaque division jusqu'à un chiffre de plus, c'est-à-dire jusqu'à autant de chiffres qu'on en a déjà à la racine; mais il y a quelques cas, rares à la vérité, où l'erreur sur le dernier chiffre, pourrait aller jusqu'à cinq unités, au lieu qu'en se bornant à un chiffre de moins, comme nous venons de le faire, on n'a jamais à craindre même une unité d'erreur sur le dernier chiffre.

Si après avoir trouvé les premiers chiffres de la racine, par la méthode ordinaire, ce qui reste après l'opération faite, se trouvait égal au double de ces premiers chiffres, il faudrait, pour éviter tout embarras, en déterminer encore un par la même méthode ordinaire, après quoi, on trouverait les autres par la méthode abrégée que nous venons d'exposer, qui, comme on le voit assez, s'applique également aux décimales.

Si la racine devait avoir des zéros parmi ses chiffres intermédiaires, dans le cas où ces zéros seraient du nombre des chiffres qu'on détermine par la division, il peut arriver, s'ils doivent être les premiers chiffres du quotient, qu'on ne s'en aperçoive pas, parce que dans la division on ne marque pas les zéros qui doivent précéder sur la gauche du quotient: le moyen de le distinguer, est de faire attention qu'on doit avoir toujours autant de chiffres au quotient qu'on en a mis à la suite du reste; et par conséquent, quand il y en aura moins, il en faudra compléter le nombre par des zéros placés sur la gauche de ce quotient.

Au reste, l'abrégé que nous venons d'exposer, est une suite de ce principe général, qu'il est aisé de déduire de ce qu'on a vu (134); savoir, que le carré d'une quantité quelconque composée de deux parties, renferme le carré de la première partie, deux fois la première partie multipliée par la seconde, et le carré de la seconde.

De la formation des Nombres cubes, et de l'extraction de leurs Racines (e).

149. Pour former ce qu'on appelle *le cube* d'un nombre, il

faut d'abord multiplier ce nombre par lui-même, et multiplier ensuite par ce même nombre le produit résultant de cette première multiplication.

Ainsi le cube d'un nombre est, à proprement parler, le produit du carré d'un nombre multiplié par ce même nombre : 27 est le cube de 3, parce qu'il résulte de la multiplication de 9 (carré de 3) par le même nombre 3.

Le nombre que l'on cube est donc trois fois facteur dans le cube; c'est pour cette raison que le cube est aussi nommé *troisième puissance*, ou *troisième degré* de ce nombre.

150. En général, on dit qu'un nombre est élevé à sa seconde, troisième, quatrième, cinquième, etc. puissance, quand on l'a multiplié par lui-même, 1, 2, 3, 4, etc. fois consécutives, ou lorsqu'il est 2 fois, 3 fois, 4 fois, 5 fois, etc. facteur dans le produit.

151. La racine cubique d'un cube proposé est le nombre qui, multiplié par son carré, produit ce cube : ainsi 3 est la racine cubique de 27.

152. On n'a donc pas besoin de règles pour former le cube d'un nombre; mais pour revenir du cube à sa racine, il faut une méthode. Nous déduirons cette méthode de l'examen de ce qui se passe dans la formation du cube.

Observons cependant qu'on n'a besoin de méthode pour extraire la racine cubique en nombres entiers, que lorsque le nombre proposé a plus de quatre chiffres; car 1000 étant le cube de 10, tout nombre au-dessous de 1000, et par conséquent de moins de quatre chiffres, aura pour racine moins que 10, c'est-à-dire moins de deux chiffres.

Ainsi tout nombre qui tombera entre deux de ceux-ci :

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729,

aura sa racine cubique, en nombre entier, entre les deux nombres correspondans de cette suite :

1 2 3 4 5 6 7 8 9,

dont la première contient les cubes.

153. Tout nombre n'a pas de racine cubique ; mais on peut approcher continuellement d'un nombre qui, étant cubé, approche aussi de plus en plus de reproduire ce premier nombre ; c'est ce que nous verrons après avoir appris à trouver la racine d'un cube parfait.

154. Voyons donc de quelles parties peut être composé le cube d'un nombre qui contiendrait des dixaines et des unités.

Puisque le cube résulte du carré d'un nombre multiplié par ce même nombre, il est essentiel de se rappeler ici (134) *que le carré d'un nombre composé de dixaines et d'unités, renferme 1°. le carré des dixaines ; 2°. deux fois le produit des dixaines par les unités ; 3°. le carré des unités.*

Pour former le cube, il faut donc multiplier ces trois parties par les dixaines et par les unités du même nombre.

Afin d'apercevoir plus distinctement les produits qui en résulteront, donnons à cette opération simulée la forme suivante :

1°.

Le carré des dixaines Deux fois le produit des dixaines par les unités Le carré des unités	étant multiplié par des dixaines, donnera.....	Le cube des dixaines. Deux fois le produit du carré des dixaines multiplié par les unités. Le produit des dixaines par le carré des unités.

2°.

Le carré des dixaines Deux fois le produit des dixaines par les unités Le carré des unités	étant multiplié par les unités, donnera.....	Le produit du carré des dixaines multiplié par les unités. Deux fois le produit des dixaines par le carré des unités.

Donc en rassemblant ces six résultats, et réunissant ceux qui sont semblables, on voit que le cube d'un nombre composé de dixaines et d'unités, contient quatre parties, savoir : *le cube des dixaines, trois fois le carré des dixaines multiplié par les unités, trois fois les dixaines multipliées par le carré des unités, et enfin le cube des unités.*

On considérera sa racine comme composée de dixaines d'unités, et par cette raison on commencera par séparer l trois derniers chiffres.

La partie 596947 qui renferme le cube des dixaines, aya plus de trois chiffres, sa racine en aura plus d'un, et par co séquent elle aura des dixaines et des unités. Il faut donc, po trouver le cube de ces premières dixaines, séparer les tr chiffres 947.

Cela posé, je cherche la racine cubique de 596; elle est j'écris ce 8 à côté.

Je cube 8, et je retranche le produit 512 de 596, il reste 8 que j'écris au-dessous de 596.

A côté de 84 j'abaisse 947, ce qui me donne 84947, dont sépare les deux derniers chiffres.

Au-dessous de la partie 849, j'écris 192, qui est le tri carré de la racine 8, et je divise 849 par 192; je trouve pq quotient 4 que j'écris à la racine.

Pour vérifier cette racine, et avoir en même temps le rest je cube 84, et je retranche le produit 592704 du nomb 596947; j'ai pour reste 4243.

A côté de ce reste j'abaisse la tranche 688, et considérant racine 84 comme un seul nombre qui marque les dixaines de racine cherchée, je sépare les deux derniers chiffres 88 de tranche abaissée, et je divise la partie 42436 par le triple ca de 84, c'est-à-dire, par 21168; je trouve pour quotient 2 q j'écris à la suite de 84.

Pour vérifier la racine 842, et avoir le reste, s'il y en a, cube 842, et je retranche le produit 596947688 du nomb proposé 596947688; et comme il ne reste rien, j'en concl que 842 est la racine exacte de 596947688.

Il faut encore observer, 1°. que dans le cours de ces opér tions, on ne doit jamais mettre plus de 9 à la racine.

2°. Si le chiffre qu'on porte à la racine était trop fort, ons' apercevrait à ce que la soustraction ne pourrait se faire, alors on diminuerait la racine successivement d'une, 2, 3, e unités, jusqu'à ce que la soustraction devînt possible.

Lorsque le nombre proposé n'est pas un cube parfait, la racine qu'on trouve n'est qu'une racine approchée, et il est rare qu'il soit suffisant de l'avoir en nombres entiers. Les décimales sont encore d'un usage très-avantageux pour pousser cette approximation beaucoup plus loin, et aussi loin qu'on le desire, sans que cependant on puisse jamais atteindre à une racine exacte.

156. Pour approcher aussi près qu'on le voudra de la racine cubique d'un cube imparfait, il faut mettre à la suite de ce nombre trois fois autant de zéros qu'on veut avoir de décimales à la racine; faire l'extraction comme dans les exemples précédens, et, après l'opération faite, séparer par une virgule sur la droite de la racine, autant de chiffres qu'on voulait avoir de décimales.

EXEMPLE III.

On demande d'approcher de la racine cubique de 8755 jusqu'à moins d'un centième près. Pour avoir des centièmes à la racine, c'est-à-dire deux décimales, il faut que le cube ou le nombre proposé en ait six (54); il faut donc mettre six zéros à la suite de 8755.

Ainsi la question se réduit à tirer la racine cubique de 8755000000.

```
8.755.000.000 | 2061
-------------
07.55
12
8000
-----------
 7550.00
 1200
 8741816
-----------
  131840.00
  127308
  875455298 1
-----------
    447019
```

Suivant ce qui a été dit ci-dessus, je partage ce nombre en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche.

Je tire la racine cubique de la dernière tranche 8; elle est 2,

que j'écris à la racine. Je cube 2, et je retranche le produit, de 8; j'ai pour reste 0, à côté duquel j'abaisse la tranche 755, dont je sépare les deux derniers chiffres 55 : au-dessous de la partie restante 7, j'écris 12, triple carré de la racine, et divisant 7 par 12, je trouve 0 pour quotient que j'écris à la racine.

Je cube la racine 20, ce qui me donne 8000 que je retranche de 8755; j'ai pour reste 755, à côté duquel j'abaisse la tranche 000, dont je sépare deux chiffres sur la droite; au-dessous de la partie restante 7550 j'écris 1200, triple carré de la racine 20; et divisant 7550 par 1200, je trouve pour quotient 6 que j'écris à la racine.

Je cube la racine 206, et je retranche le produit, de 8755000; j'ai pour reste 13184, à côté duquel j'abaisse la dernière tranche 000, dont je sépare les deux derniers chiffres. Au-dessous de la partie restante 131840, j'écris 127308, triple carré de la racine trouvée 206. Je divise 131840 par 127308; je trouve pour quotient 1, que j'écris à la suite de 206. Je cube 2061, et ayant retranché de 8755000000, le produit 8754552981, j'ai pour reste 447019.

La racine cubique approchée de 8755000000 est donc 2061; donc celle de 8755,000000 est 20,61, puisque le cube a trois fois autant de décimales que sa racine (54).

Si l'on voulait pousser l'approximation plus loin, on mettrait à la suite du reste trois zéros, et on continuerait comme on a fait à chaque fois qu'on a descendu une tranche.

157. Puisque, pour multiplier une fraction par une fraction, il faut multiplier numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur, il faudra donc, pour cuber une fraction, cuber son numérateur et son dénominateur. Donc réciproquement pour extraire la racine cubique d'une fraction, il faudra extraire la racine cubique du numérateur et la racine cubique du dénominateur. Ainsi la racine cubique de $\frac{27}{64}$ est $\frac{3}{4}$, parce que la racine cubique de 27 est 3, et celle de 64 est 4.

158. Mais si le dénominateur seul est cube, on tirera la racine

racine approchée du numérateur, et on donnera à cette racine pour dénominateur la racine cubique du dénominateur. Par exemple, si l'on demande la racine cubique de $\frac{143}{343}$: comme le numérateur n'est pas un cube, j'en tire la racine approchée, qui sera 5,22 à moins d'un centième près; et tirant la racine de 343, qui est 7, j'ai $\frac{5,22}{7}$ pour la racine approchée de $\frac{143}{343}$; ou bien, en réduisant en décimales (90), j'ai 0,74 pour cette racine approchée à moins d'un centième près.

159. Si le dénominateur n'est pas un cube, on multipliera les deux termes de la fraction par le carré de ce dénominateur, et alors le nouveau dénominateur étant un cube, on se conduira comme il vient d'être dit. Par exemple, si l'on demande la racine cubique de $\frac{3}{7}$, je multiplie le numérateur et le dénominateur par 49, carré du dénominateur 7; j'ai $\frac{147}{343}$, qui (88) est de même valeur que $\frac{3}{7}$. La racine cubique de $\frac{147}{343}$ est $\frac{5,27}{7}$, ou en réduisant purement en décimales, 0,75. La racine cubique de $\frac{3}{7}$ est donc 0,75 a moins d'un centième près.

S'il y avait des entiers joints aux fractions, on convertirait le tout en fraction, et la question serait réduite à tirer la racine cubique d'une fraction. (157 *et suiv.*)

On pourrait aussi, soit qu'il y ait des entiers, soit qu'il n'y en ait point, réduire la fraction en décimales; mais il faut avoir soin de pousser cette réduction jusqu'à trois fois autant de décimales qu'on veut en avoir à la racine. Ainsi, si l'on demandait la racine cubique de $7\frac{3}{11}$, approchée jusqu'à moins d'un millième, on changerait la fraction $\frac{3}{11}$, en 0,27272272; ensorte

que, pour avoir la racine cubique de $7\frac{3}{11}$; on tirerait celle de 7,272727272 qu'on trouvera être 1,937.

160. Pour tirer la racine cubique d'un nombre qui aura des décimales, il faudra le préparer par un nombre suffisant de zéros mis à sa suite de manière que le nombre de ses décimales soit, ou 3, ou 6, ou 9, etc.; alors on en tirera la racine comme s'il n'y avait point de virgule; et après l'opération faite, on séparera sur la droite de la racine, par une virgule, un nombre de chiffres qui soit le tiers du nombre des décimales de la quantité proposée; ensorte que si la racine n'avait pas suffisamment de chiffres pour que cette règle eût son exécution, on y suppléerait par des zéros placés sur la gauche de cette racine. Ainsi pour tirer la racine cubique de 6,54 à moins d'un millième près, je mettrai sept zéros, et je tirerai la racine cubique de 6540000000 qui sera 1870; j'en séparerai trois chiffres, puisqu'il y a 9 décimales au cube, et j'aurai 1,870, ou simplement 1,87 pour la racine cubique de 6,54. On trouvera de même que celle de 0,0006, approchée à moins d'un centième près, est 0,08.

161. Quand on a trouvé les quatre premiers chiffres de la racine cubique par la méthode qu'on vient d'expliquer, on peut trouver les autres plus promptement par la division, et cela de la manière suivante.

Qu'on demande la racine cubique de 526462783272345 6 : j'en cherche les quatre premiers chiffres par la méthode ordinaire; ils sont 1739, et le reste de l'opération est 5681413; à côté de ce reste, je mets les deux chiffres 72 qui suivent la partie 526462783 2 qui a donné les quatre premiers chiffres. (Je mettrais les trois chiffres qui suivent cette même partie, si la racine trouvée avait cinq chiffres, et les quatre si elle en avait six). Je divise 568141372 par 9072363, triple carré de la racine 1739; j'ai pour quotient 62, et ce sont deux nouveaux chiffres à mettre à la suite de 1739, ensorte que 173962 est, en nombres entiers, la racine cubique du nombre proposé.

Si l'on voulait pousser plus loin, on cuberait cette racine, et ayant retranché le produit du nombre proposé, on mettrait à la suite du reste quatre zéros, et on diviserait le tout par le triple du carré de 173962, ce qui donnerait quatre décimales pour la racine.

On fera ici la même observation qu'on a faite (148) sur le cas où la division ne donne pas autant de chiffres qu'elle doit en donner. Et dans ces divisions on s'aidera de la règle abrégée qui a été donnée (69 *et suiv.*)

Des Raisons, Proportions, et Progressions, et de quelques Règles qui en dépendent.

162. Les mots *raison* et *rapport* ont la même signification en Mathématiques, et l'un et l'autre expriment le résultat de la comparaison des deux quantités.

163. Si dans la comparaison de deux quantités on a pour but de connaître de combien l'une surpasse l'autre, ou en est surpassée, le résultat de cette comparaison, qui est la différence de ces deux quantités, se nomme leur *Rapport arithmétique.*

Ainsi, si je compare 15 avec 8 pour connaître leur différence 7, ce nombre 7 qui est le résultat de la comparaison, est le rapport arithmétique de 15 à 8.

Pour marquer que l'on compare deux quantités sous ce point de vue, on sépare l'une de l'autre par un point; ensorte que 15.8 marque que l'on considère le rapport arithmétique de 15 à 8.

164. Si dans la comparaison de deux quantités on se propose de connaître combien l'une contient l'autre, ou est contenue en elle, le résultat de cette comparaison se nomme leur *Rapport géométrique.* Par exemple, si je compare 12 à 3 pour savoir combien de fois 12 contient 3, le nombre 4 qui exprime ce nombre de fois, est le rapport géométrique de 12 à 3.

Pour marquer que l'on compare deux quantités sous ce point de vue, on sépare l'une de l'autre par deux points : cette expression 12:3 marque que l'on considère le rapport géométrique de 12 à 3.

165. Des deux quantités que l'on compare, celle qu'on énonce ou qu'on écrit la première, se nomme *antécédent*, et la seconde se nomme *conséquent.* Ainsi dans le rapport 12:3, 12 est l'antécédent, et 3 est le conséquent : l'un et l'autre s'appellent les *termes* du rapport.

166. Pour avoir le rapport arithmétique de deux quantités,

il n'y a donc autre chose à faire qu'à retrancher la plus petite de la plus grande.

167. Et pour avoir le rapport géométrique de deux quantités, il faut diviser l'une par l'autre.

168. Nous évaluerons ce rapport, dorénavant, en divisant l'antécédent par le conséquent : ainsi le rapport de 12 à 3 est 4, et le rapport de 3 à 12 est $\frac{3}{12}$ ou $\frac{1}{4}$.

169. Un rapport arithmétique ne change point quand on ajoute à chacun de ses deux termes, ou qu'on en retranche une même quantité, parce que la différence (en quoi consiste le rapport) reste toujours la même.

170. Un rapport géométrique ne change point quand on multiplie ou quand on divise ses deux termes par un même nombre ; car le rapport géométrique consistant (168) dans le quotient de la division de l'antécédent par le conséquent, est une quantité fractionnaire qui (88) ne peut changer par la multiplication ou la division de ses deux termes par un même nombre. Ainsi le rapport 3 : 12 est le même que celui 6 : 24 que l'on a en multipliant les deux termes du premier par 2 ; il est le même que celui de 1 : 4 que l'on a en divisant par 3.

171. Cette propriété sert à simplifier les rapports. Par exemple, si j'avais à examiner le rapport de $6\frac{3}{4}$ à $10\frac{2}{3}$, je dirais, en réduisant tout en fraction, ce rapport est le même que celui de $\frac{27}{4}$ à $\frac{32}{3}$, ou en réduisant au même dénominateur, le même que celui de $\frac{81}{12}$ à $\frac{128}{12}$, ou enfin en supprimant le dénominateur 12 (ce qui revient au même que de multiplier les deux termes du rapport par 12), ce rapport est le même que celui de 81 à 128.

172. Lorsque quatre quantités sont telles que le rapport des deux premières est le même que le rapport des deux dernières, on dit que ces quatre quantités forment une *proportion*, et

cette proportion est arithmétique ou géométrique, selon que le rapport qu'on y considère est arithmétique ou géométrique.

Les quatre quantités 7, 9, 12, 14 forment une proportion arithmétique, parce que la différence des deux premières est la même que celle des deux dernières. Pour marquer qu'elles sont en proportion arithmétique, on les écrit ainsi, 7.9 : 12.14, c'est-à-dire, qu'on sépare par un point les deux termes de chaque rapport, et les deux rapports par deux points. Le point qui sépare les deux termes de chaque rapport, signifie *est à*, et les deux points qui séparent les deux rapports, signifient *comme;* ensorte que pour énoncer la proportion ainsi écrite, on dit, 7 *est à* 9 *comme* 12 *est à* 14.

Les quatre quantités 3, 15, 4, 20 forment une proportion géométrique, parce que 3 est contenu dans 15, comme 4 l'est dans 20. Pour marquer qu'elles sont en proportion géométrique, on les écrit ainsi, 3 : 15 :: 4 : 20, c'est-à-dire, qu'on sépare les deux termes de chaque rapport par deux points, et les deux rapports par quatre points. Les deux points signifient *est à*, et les quatre points signifient *comme ;* de sorte qu'on dit 3 *est à* 15, *comme* 4 *est à* 20.

Il faut seulement observer que, dans la proportion arithmétique, on fait précéder le mot *comme* du mot *arithmétiquement.*

173. Le premier et le dernier terme de la proportion se nomment les *extrêmes;* le 2ᵉ et le 3ᵉ se nomment les *moyens.*

Comme il y a deux rapports, et par conséquent deux antécédens et deux conséquens; on dit, pour le premier rapport, *premier antécédent*, *premier conséquent;* et pour le second, *second antécédent*, *second conséquent.*

174. Quand les deux termes moyens d'une proportion sont égaux, la proportion se nomme proportion *continue* 3.7 : 7.11 forment une proportion arithmétique continue, on l'écrit ainsi ÷3.7.11. ; les deux points et la barre qui précèdent, sont pour avertir que dans l'énoncé on doit répéter le terme moyen qui est ici 7.

La proportion 5 : 20 :: 20 : 80 est une proportion géométrique

continue, que par abréviation on écrit ainsi ÷÷5:20:80; l'usage des quatre points et de la barre est le même que dans la proportion arithmétique continue.

175. Il suit de ce que nous venons de dire sur les proportions arithmétiques et géométriques,

1°. Que si dans une proportion arithmétique on ajoute à chacun des antécédens, ou si l'on en retranche la différence ou raison qui règne dans cette proportion, selon que l'antécédent sera plus petit ou plus grand que son conséquent, chaque antécédent deviendra égal à son conséquent; car c'est donner au plus petit terme de chaque rapport ce qui lui manque pour égaler son voisin; ou retrancher du plus grand ce dont il surpasse son voisin. Ainsi dans la proportion 3.7:8.12, ajoutez la différence 4, vous aurez au premier et au troisième terme 7.7:12.12, et il est aisé de sentir que cela est général.

2°. Si dans une proportion géométrique vous multipliez chacun des deux conséquens, par le rapport, vous les rendrez pareillement égaux chacun à son antécédent; car multiplier le conséquent par le rapport, c'est le prendre autant de fois qu'il est contenu dans l'antécédent: ainsi, dans la proportion 12:3::20:5, multipliez 3 et 5, chacun par 4, et vous aurez 12:12::20:20; pareillement, dans la proportion 15:9::45:27; multipliez 9 et 27 chacun par $\frac{15}{9}$ ou $\frac{5}{3}$ qui est le rapport, vous aurez 15:15::45:45.

Propriétés des Proportions Arithmétiques.

176. La propriété fondamentale des proportions arithmétiques, est que *la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens;* par exemple, dans cette proportion 3.7:8.12, la somme 3 et 12 des extrêmes, et celle 7 et 8 des moyens, sont également 15.

Voici comment on peut s'assurer que cette propriété est générale.

Si les deux premiers termes étaient égaux entr'eux et les

deux derniers aussi égaux entr'eux, comme dans cette proportion :

7 . 7 : 12 . 12,

Il est évident que la somme des extrêmes serait égale à celle des moyens.

Or toute proportion arithmétique peut être ramenée à cet état (175), en ajoutant à chaque antécédent, ou en ôtant la différence qui règne dans la proportion. Cette addition, qui augmentera également la somme des extrêmes et celle des moyens, ne peut rien changer à l'égalité de ces deux sommes ; ainsi si elles deviennent égales par cette addition, c'est qu'elles étaient égales sans cette même addition. Le raisonnement est le même pour le cas de la soustraction.

177. Puisque dans la proportion continue les deux termes moyens sont égaux, il suit de ce qu'on vient de démontrer, que, dans cette même proportion, la somme des extrêmes est double du terme moyen, ou que le terme moyen est la moitié de la somme des extrêmes. Ainsi pour avoir un moyen arithmétique entre 7 et 15, par exemple, j'ajoute 7 à 15; et prenant la moitié de la somme 22, j'ai 11 pour le terme moyen, ensorte que : 7 . 11 . 15.

Propriétés des Proportions Géométriques.

178. La propriété fondamentale de la proportion géométrique, est que *le produit des extrêmes est égal au produit des moyens ;* par exemple, dans cette proportion 3:15::7:35, le produit de 35 par 3, et celui de 15 par 7, sont également 105.

Voici comment on peut se convaincre que cette propriété a lieu dans toute proportion géométrique.

Si les antécédens étaient égaux à leurs conséquens, comme dans cette proportion :

3 : 3 :: 7 : 7,

il est évident que le produit des extrêmes serait égal au produit des moyens.

Mais on peut toujours ramener une proportion à cet état (175), en multipliant les deux conséquens par la raison. Cette

multiplication fera, à la vérité, que le produit des extrêmes sera un certain nombre de fois plus grand qu'il n'aurait été, ou sera un certain nombre de fois plus petit, si le rapport est une fraction; mais elle produira le même effet sur celui des moyens; donc, puisqu'après cette multiplication le produit des extrêmes serait égal au produit des moyens, ces deux produits doivent aussi être égaux sans cette même multiplication.

On peut donc prendre le produit des extrêmes pour celui des moyens, et réciproquement.

Donc *dans la proportion continue, le produit des extrêmes est égal au carré du terme moyen;* car les deux moyens étant égaux, leur produit est le carré de l'un d'eux. Donc pour avoir un moyen géométrique entre deux nombres proposés, il faut multiplier ces deux nombres l'un par l'autre, et tirer la racine carrée de ce produit. Ainsi pour avoir un moyen géométrique entre 4 et 9, je multiplie 4 par 9, et la racine carrée 6 du produit 36 est le moyen proportionnel cherché.

179. De la propriété fondamentale de la proportion géométrique, il suit que si connaissant les trois premiers termes d'une proportion, on voulait déterminer le quatrième, il faudrait *multiplier le second par le troisième, et diviser le produit par le premier;* car il est évident (74) qu'on aurait le quatrième terme en divisant le produit des deux extrêmes par le premier terme; or ce produit est le même que celui des moyens; donc on aura aussi le quatrième terme en divisant le produit des moyens par le premier terme.

Ainsi, si l'on demande quel serait le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers seraient 5:8::12; je multiplie 8 par 12, ce qui me donne 96 que je divise par 3; le quotient 32 est le quatrième terme demandé; ensorte que 3,8,12,32 forment une proportion: en effet, le premier rapport est $\frac{3}{8}$, et le second est $\frac{12}{32}$ qui (89), en divisant les deux termes par 4, est aussi $\frac{3}{8}$.

Par un semblable raisonnement, on voit qu'on peut trouver tout autre terme de la proportion, lorsqu'on en connaît trois. *Si le terme qu'on veut trouver est un des extrêmes, il faudra multiplier les deux moyens, et diviser par l'extrême connu : si, au contraire, on veut trouver un des moyens, il faudra multiplier les deux extrêmes, et diviser par le terme moyen connu.*

180. Cette propriété de l'égalité entre le produit des extrêmes et celui des moyens, ne peut appartenir qu'à quatre quantités en proportion géométrique. En effet, si l'on avait quatre quantités qui ne fussent point en proportion géométrique, en multipliant les conséquens par le rapport des deux premières, il n'y aurait que le premier antécédent qui deviendrait égal à son conséquent. Par exemple, si l'on avait 3, 12, 5, 10, en multipliant les conséquens 12 et 10 par la raison $\frac{1}{4}$ des deux premiers termes 3 et 12, on aurait 3,3,5, $\frac{10}{4}$ dans lesquels il est évident que le produit des extrêmes ne peut être égal à celui des moyens; donc ces produits ne pourraient pas être égaux non plus, quand même on n'aurait pas multiplié les conséquens par la raison $\frac{1}{4}$. Il est visible que ce raisonnement peut s'appliquer à tous les cas.

Donc, *si quatre quantités sont telles, que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens, ces quatre quantités sont en proportion.* De là nous conclurons cette seconde propriété des proportions.

181. *Si quatre quantités sont en proportion, elles y seront encore si l'on met les extrêmes à la place des moyens, et les moyens à la place des extrêmes.*

182. La même chose aura lieu, c'est-à-dire *que la proportion subsistera si l'on échange les places des extrêmes, ou celles des moyens.*

En effet, dans tous ces cas, il est aisé de voir que le produit des extrêmes sera toujours égal à celui des moyens.

Ainsi la proportion 3:8::12:32 peut fournir toutes les proportions suivantes par la seule permutation de ses termes.

3 : 8::12 : 32; 3 : 12::8 : 32; 32 : 12::8 : 3; 32 : 8::12 : 3;
8 : 3::32 : 12; 8 : 32::3 : 12; 12 : 3::32: 8; 12 :32:: 3 : 8;

Et il en est de même de toute autre proportion.

183. Puisqu'on peut mettre le troisième terme à la place du second, et réciproquement, on doit en conclure *qu'on peut, sans troubler une proportion, multiplier ou diviser les deux antécédens par un même nombre, et qu'il en est de même à l'égard des conséquens;* car en faisant cette permutation, les deux antécédens de la proportion donnée formeront le premier rapport; et les deux conséquens, le second. Ainsi multiplier les deux antécédens de la première proportion, revient alors à multiplier les deux termes d'un rapport chacun par un même nombre, ce qui (170) ne change point ce rapport. Par exemple, si j'ai la proportion 3:7::12:28, je puis, en divisant les deux antécédens par 3, dire 1:7::4:28, parce que de la proportion 3:7::12:28 on peut (182) conclure 3:12::7:28; et en divisant les deux termes du premier rapport par 3, 1:4::7:28, qui (182) peut être changée en 1:7::4:28.

184. *Tout changement fait dans une proportion, de manière que la somme de l'antécédent et du conséquent, ou leur différence, soit comparée à l'antécédent ou au conséquent, de la même manière dans chaque rapport, formera toujours une proportion.*

Par exemple, si l'on a la proportion

12 : 3 :: 32 : 8,

on en pourra conclure les proportions suivantes :

12 *plus* 3 : 3 :: 32 *plus* 8 : 8
ou 12 *moins* 3 : 3 :: 32 *moins* 8 : 8
ou 12 *plus* 3 : 12 :: 32 *plus* 8 : 32
ou 12 *moins* 3 : 12 :: 32 *moins* 8 : 32

Car si c'est au conséquent que l'on compare, il est facile de

voir que l'antécédent, augmenté ou diminué du conséquent, contiendra ce conséquent une fois de plus ou une fois de moins qu'auparavant ; et comme cette comparaison se fait de la même manière pour le second rapport, qui par la nature de la proportion, est égal au premier, il s'ensuit nécessairement que les deux nouveaux rapports seront aussi égaux entr'eux.

Si c'est à l'antécédent que l'on compare, le même raisonnement aura encore lieu, en concevant que dans la proportion sur laquelle on fait ce changement, on ait mis l'antécédent de chaque rapport à la place de son conséquent, et le conséquent à la place de l'antécédent; ce qui est permis (181).

185. Puisqu'en mettant le troisième terme d'une proportion à la place du second, et réciproquement, il y a encore proportion (182), on doit conclure que les deux antécédens se contiennent l'un l'autre autant de fois que les conséquens se contiennent aussi l'un l'autre.

Donc *la somme de deux antécédens de toute proportion, contient la somme des deux conséquens, ou est contenue en elle, autant qu'un des antécédens contient son conséquent, ou est contenu en lui.*

Par exemple, dans la proportion

12 : 3 :: 32 : 8

12 plus 32 : 3 plus 8 :: 32 : 8, ce qui est évident.

Mais pour s'en convaincre généralement, il n'y a qu'à faire attention que si le premier antécédent contient le second quatre fois, par exemple, la somme des deux antécédens contiendra le second cinq fois ; et, par la même raison, la somme des conséquens contiendra le second conséquent cinq fois ; donc la somme des antécédens contiendra celle des conséquens, comme le quintuple d'un des antécédens contient le quintuple de son conséquent ; c'est-à-dire (170) comme un des antécédens contient son conséquent.

On prouverait de même que la différence des antécédens est à la différence des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.

186. Il est évident que la proposition qu'on vient de démontrer revient à celle-ci ; si on a deux rapports égaux, par exemple, celui

de..... 4 : 12
et celui de..... 7 : 21
11 : 33

On aura encore le même rapport, en ajoutant antécédent à antécédent, et conséquent à conséquent.

Donc, *si l'on a plusieurs rapports égaux, la somme de tous les antécédens est à la somme de tous les conséquens, comme l'un des antécédens est à son conséquent.* Par exemple, si on a les rapports égaux 4 : 12 :: 7 : 21 :: 2 : 6, on peut dire que *4 plus 7 plus 2*, sont à 12 *plus* 21 *plus* 6, comme 4 est à 12, ou comme 7 est à 21, etc.

Car, après avoir ajouté, entr'eux, les antécédens des deux premiers rapports, et leurs conséquens aussi entr'eux, le nouveau rapport qui, selon ce qu'on vient de voir, sera le même que chacun des deux premiers, sera aussi le même que le troisième : par conséquent on pourra l'ajouter de même avec celui-ci, et il en résultera encore le même rapport, et ainsi de suite.

187. On appelle *rapport composé*, celui qui résulte de deux ou d'un plus grand nombre de rapports dont on multiplie les antécédens entr'eux, et les conséquens entr'eux. Par exemple, si l'on a les deux rapports 12 : 4 et 25 : 5, le produit des antécédens 12 et 25 sera 300, celui des conséquens 4 et 5 sera 20 ; le rapport de 300 à 20 est ce qu'on appelle rapport composé des rapports de 12 à 4, et de 25 à 5.

188. Ce rapport est le même que si l'on avait évalué séparément chacun des rapports composans, et qu'on eût multiplié entr'eux les nombres qui expriment ces rapports. En effet, le rapport de 12 à 4 est 3, celui de 25 à 5 est 5 : or, 3 fois 5 font 15, qui est le rapport de 300 à 20 ; et on peut voir que cela est général, en faisant attention que le rapport est mesuré (168) par une fraction qui a l'antécédent pour numérateur, et le conséquent pour dénominateur : ainsi le rapport composé doit être

une fraction qui ait pour numérateur le produit des deux antécédens, et pour dénominateur le produit des deux conséquens; c'est donc (106) le produit des deux fractions qui expriment les rapports composans.

189. Si les rapports que l'on multiplie sont égaux, le rapport composé est dit *rapport doublé*, si l'on n'a multiplié que deux rapports; *rapport triplé*, si l'on en a multiplié trois; *quadruplé* si l'on en a multiplié quatre, et ainsi de suite. Par exemple, si l'on multiplie le rapport de 2 à 3 par celui de 4 à 6 qui lui est égal, on aura le rapport composé 8 : 18 qui sera dit rapport *doublé* du rapport de 2 à 3, ou de 4 à 6.

190. *Si l'on a deux proportions, et qu'on les multiplie par ordre, c'est-à-dire le premier terme de l'une par le premier terme de l'autre, le second par le second, et ainsi de suite; quatre produits qui en résulteront, seront en proportion.*

Car en multipliant ainsi deux proportions, c'est multiplier deux rapports égaux par deux rapports égaux (172); donc les deux rapports composés qui en résultent doivent être égaux; donc les quatre produits doivent être en proportion (172).

191. Concluons de là que *les carrés, les cubes, et en général les puissances semblables de quatre quantités en proportion, sont aussi en proportion;* puisque pour former ces puissances, il ne faut que multiplier la proportion par elle-même plusieurs fois de suite.

192. *Les racines carrées, cubiques, et en général les racines semblables de quatre quantités en proportion sont aussi en proportion;* car le rapport des racines carrées des deux premiers termes n'est autre chose que la racine carrée du rapport de ces deux termes (142 et 167); et il en est de même du rapport des racines carrées des deux derniers termes; donc puisque les deux rapports primitifs sont supposés égaux, leurs racines carrées sont égales; donc le rapport des racines carrées des deux premiers termes sera égal au rapport des racines carrées des deux derniers. On prouvera de même pour les racines cubiques, quatrièmes, etc.

Usage des Proportions précédentes.

193. Les propositions que nous venons de démontrer, et qu'on appelle les *Règles des proportions*, ont des applications continuelles dans toutes les parties des Mathématiques. Nous nous bornerons ici à celles qui appartiennent à l'Arithmétique, et nous commencerons par celles qu'on peut faire de ce qui a été établi (179), et qui est la base de presque toutes les autres.

De la Règle de Trois *directe et simple.*

194. On distingue plusieurs sortes de règles de *Trois :* elles ont toutes pour objet de faire connaître un terme d'une proportion dont on en connaît trois.

Celle qu'on appelle *règle de Trois directe et simple*, est nommée *simple*, parce que l'énoncé des questions auxquelles on l'applique, ne renferme jamais plus de quatre quantités, dont trois sont connues, et la quatrième est à trouver.

On l'appelle *directe*, parce que des quatre quantités qu'on y considère, il y en a toujours deux qui, non-seulement sont relatives aux deux autres, mais qui en dépendent de manière que, de même qu'une des quantités contient l'autre, ou est contenue en elle, de même aussi la quantité relative à la première contient la quantité relative à la seconde, ou est contenue en elle; c'est-à-dire d'une manière plus abrégée, qu'une quantité et sa relative peuvent toujours être, toutes deux, ou antécédens ou conséquens dans la proportion; ce qui n'a pas lieu dans la règle de Trois inverse, comme nous le verrons dans peu.

La méthode pour trouver le quatrième terme d'une proportion, et par conséquent pour faire la règle de Trois directe et simple, est suffisamment exposée (179); mais il est à propos de faire connaître, par quelques exemples, l'usage qu'on peut faire de cette règle.

EXEMPLE I.

40 ouvriers ont fait, en un certain temps, 268 toises d'ou-

vrage, on demande combien 60 ouvriers pourraient en faire dans le même temps ?

Il est clair que le nombre des toises doit augmenter à proportion du nombre des ouvriers ; ensorte que celui-ci devenant double, triple, quadruple, etc. le premier doit devenir aussi double, triple, quadruple, etc. Ainsi l'on voit que le nombre de toises cherché, doit contenir les 268 toises, autant que le nombre 60, relatif au premier, contient le nombre 40 relatif au second : il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commencerait par ces trois-ci :

$$40 : 60 :: 268^{T} :$$

Ou (en divisant ces deux premiers termes par 20), ce qui est permis (170), par ces trois autres.

$$2 : 3 :: 268^{T} :$$

Ainsi, selon qu'il a été dit (179), je multiplie 268^{T} par 3, et je divise le produit 804 par 2 ; ce qui donne pour quotient 402^{T}, et par conséquent 402^{T} pour l'ouvrage que feraient les 60 ouvriers.

EXEMPLE II.

Un navire a fait, avec un même vent, 275 lieues en 3 jours ; on demande en combien de temps on en ferait 2000, toutes les autres circonstances demeurant les mêmes ?

Il est évident qu'il faut plus de temps, à proportion du nombre de lieues, et que par conséquent le nombre de jours cherché doit contenir 3 jours, autant que 2000 lieues contiennent 275 lieues : il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commence par ces trois-ci :

$$275 : 2000 :: 3 :$$

Multipliant 2000 par 3, et divisant le produit 6000 par 275, on aura 21 jours $\frac{9}{11}$.

EXEMPLE III.

$52^T\ 4^P\ 5^p$ d'ouvrage ont été payées $168^{\#}\ 9^s\ 4^d$; on demande combien on doit payer pour $77^T\ 1^P\ 8^p$?

Le prix de $77^T\ 1^P\ 8^p$ doit contenir le prix $168^{\#}\ 9^s\ 4^d$ des $52^T\ 4^P\ 5^p$, autant que $77^T\ 1^P\ 8^p$ doit contenir $52^T\ 4^P\ 5^p$. Il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commencerait par ces trois-ci.

$$52^T\ 4^P\ 5p : 77^T\ 1^P\ 8p :: 168^{\#}\ 9^s\ 4^d :$$

C'est-à-dire qu'il faut multiplier $168^{\#}\ 9^s\ 4^d$ par $77^T\ 1^P\ 8^p$, et diviser le produit par $52^T\ 4^P\ 5^p$, ce qu'on peut faire par ce qui a été dit (122 et 128).

Mais il sera encore plus simple de réduire les deux premiers termes à leur plus petite espèce, c'est-à-dire en pouces; et la question sera réduite à chercher le quatrième terme d'une proportion qui commencerait par ces trois autres:

$$3797 : 5564 :: 168^{\#}\ 9^s\ 4^d;$$

Alors multipliant $168^{\#}\ 9^s\ 4^d$ par 5564, on aura $93734 8^{\#}\ 10^s\ 8^d$, et divisant par 3797, le quotient $246^{\#}\ 17^s\ 3^d\ \frac{2780}{3797}$ sera ce qu'on doit payer pour les $77^T\ 1^P\ 8^p$.

S'il y avait des fractions, après avoir réduit les deux termes de même espèce, à leur plus petite unité, comme dans cet exemple, on simplifierait le rapport de ces deux termes de la manière qui a été enseignée (171).

De la Règle de Trois *inverse et simple.*

195. La *Règle de Trois inverse et simple* diffère de la règle de Trois directe, dont nous venons de parler, en ce que des quatre quantités qui entrent dans l'énoncé de la question pour laquelle on fait cette opération, les deux principales doivent se contenir l'une l'autre, dans un ordre tout opposé à celui des deux autres quantités qui leur sont relatives; ensorte que, lorsque par l'examen de la question, on a donné à ces quantités la disposition convenable pour former une proportion, l'une des quantités

principales et sa relative forment les extrêmes, et l'autre quantité principale, avec sa relative, forment les moyens.

Au reste, cela n'introduit aucune différence dans la manière de faire l'opération; c'est toujours le quatrième terme d'une proportion qu'il s'agit de trouver; ou du moins on peut toujours amener la chose à ce point.

Quelques arithméticiens ont prescrit, pour le cas présent, une règle assujétie à l'énoncé de la question : nous ne suivrons point leur exemple; c'est la nature de la question, et non pas son énoncé (qui souvent est vicieux), qui doit diriger dans la résolution.

EXEMPLE I.

30 hommes ont fait un certain ouvrage en 25 jours ; combien faudrait-il d'hommes pour faire le même ouvrage en 10 jours?

On voit qu'il faut, dans ce second cas, d'autant plus d'hommes que le nombre de jours est moindre ; ainsi le nombre d'hommes cherché, doit contenir le nombre de 30 hommes, autant que le nombre 25 de jours, relatif à ceux-ci, contient le nombre 10 de jours, relatif à ceux-là. Il ne s'agit donc que de trouver le quatrième terme d'une proportion qui commencerait par ces trois-ci :

$$10j : 25j :: 30^{ho}.$$

C'est-à-dire de multiplier 30 par 25, et de diviser le produit 750 par 10, ce qui donne 75 ou 75^{ho}.

EXEMPLE II.

Un équipage n'a plus que pour 15 jours de vivres; mais les circonstances doivent lui faire tenir encore la mer pendant 20 jours; on demande à combien on doit réduire la totalité des rations par jour?

Représentons par l'unité, la totalité des vivres que l'on consomme par jour; on voit que ce à quoi on doit se restreindre, doit être d'autant moindre de cette unité, que le nombre 20 des jours pendant lesquels cette économie doit durer, est plus grand

que le nombre de 15 jours; que par conséquent, de même que 20 jours contiennent 15 jours, de même la totalité des vivres que l'on aurait consommés pendant chacun de ces 15 jours, doit contenir celle des vivres que l'on consommera pendant chacun des 20 jours : il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commencerait par les trois suivans :

$$20j : 15j :: 1 :$$

Ce quatrième terme sera $\frac{15}{20}$ ou $\frac{3}{4}$; il faut donc se réduire aux $\frac{3}{4}$ de ce qu'on aurait consommé par jour.

De la Règle de Trois *composée.*

196. Dans les deux règles de Trois que nous venons d'exposer, la quantité cherchée, et la quantité de même espèce qui entre dans l'énoncé de la question, ont entr'elles un rapport simple et déterminé par celui des deux autres quantités qui entrent pareillement dans l'énoncé de la question.

Dans la règle de Trois composée, le rapport de la quantité cherchée à la quantité de même espèce qui entre dans l'énoncé de la question, n'est pas donné par le rapport simple de deux autres quantités seulement, mais par plusieurs rapports simples qu'il s'agit de composer (187) d'après l'examen de la question.

Quand une fois ces rapports ont été composés, la règle est réduite à une règle de Trois simple; les exemples suivans vont éclaircir ce que nous disons.

EXEMPLE I.

30 hommes ont fait 132 toises d'ouvrage en 18 jours; combien 54 hommes en feront-ils en 28 jours?

On voit que l'ouvrage dépend ici, non-seulement du nombre des hommes, mais encore du nombre des jours.

Pour avoir égard à l'un et à l'autre, il faut considérer que 30 hommes travaillant pendant 18 jours, ne font qu'autant que 18 fois 30 hommes, c'est-à-dire que 540 hommes qui travailleraient pendant un jour.

Pareillement, 54 hommes travaillant pendant 28 jours, ne font qu'autant que feraient 28 fois 54 hommes, ou 1512 hommes travaillant pendant un jour.

La question est donc changée en celle-ci : 540 hommes ont fait 132 toises d'ouvrage, combien 1512 hommes en feraient-ils dans le même temps? c'est-à-dire qu'il faut chercher le quatrième terme d'une proportion qui commencerait par ces trois-ci :

$$540^h : 1512^h :: 132^T :$$

Multipliant 1512 par 132, et divisant le produit par 540, on trouvera pour réponse à la question $369^T\ 3^P\ 7^P\ 2^l\ \frac{2}{5}$.

EXEMPLE II.

Un homme, marchant 7 heures par jour, a mis 30 jours à faire 230 lieues; s'il marchait 10 heures par jour, combien emploierait-il de jours pour faire 600 lieues, allant toujours avec la même vitesse ?

S'il marchait pendant le même nombre d'heures par jour, dans chaque cas on voit qu'il emploierait d'autant plus de jours qu'il a plus de chemin à faire; mais comme il marche pendant un plus grand nombre d'heures chaque jour, dans le second cas, il lui faudra moins de temps par cette raison; ainsi l'opération tient en partie à la règle de Trois directe, et à la règle de Trois inverse.

On la réduira à une règle de Trois simple, en considérant que marcher pendant 30 jours, en employant 7 heures chaque jour, c'est marcher pendant 30 fois 7 heures, ou 210 heures; ainsi on peut changer la question en cette autre : il a fallu 210 heures pour faire 230 lieues; combien en faudra-t-il pour faire 600 lieues ? Quand on aura trouvé le nombre d'heures qui satisfait à cette question : en le divisant par 10, on aura le nombre de jours demandé, puisque l'homme dont il s'agit emploie 10 heures par jour.

Ainsi il faut chercher le quatrième terme de la proportion, dont les trois premiers sont :

$$230^l : 600^l :: 210^h.$$

On trouvera que ce quatrième terme est 547 heures et $\frac{19}{23}$, lesquelles divisées par 10, nombre des heures que cet homme emploie chaque jour, donnent 54 jours et $\frac{180}{230}$ ou $54^j \frac{18}{23}$.

De la Règle de Société.

197. La règle de Société est ainsi nommée, parce qu'elle sert à partager entre plusieurs associés, le bénéfice ou la perte résultant de leur société.

Son but est de partager un nombre proposé, en parties qui aient entr'elles des rapports donnés.

La règle que l'on donne pour cet effet, est fondée sur ce que nous avons établi (186) : nous allons la déduire de ce principe, dans l'exemple suivant.

EXEMPLE I.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de partager 120, en trois parties qui aient entr'elles les mêmes rapports que les nombres 4, 3, 2; l'énoncé de la question fournit ces deux proportions.

4 : 3 :: la première partie est à la seconde.
4 : 2 :: la première partie est à la troisième.

Ou (182) ces deux autres :

4 est à la première partie :: 3 est à la seconde.
4 est à la première partie :: 2 est à la troisième.

De sorte qu'on a ces trois rapports égaux.

4 est à la première partie :: 3 est à la seconde :: 2 est à la troisième.

Or on a vu (186) que la somme des antécédens de plusieurs rapports égaux, est à la somme des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent : on peut donc dire ici, que la somme 9 des trois parties proportionnelles à celle que l'on cherche, est la somme 120 de celle-ci, comme l'une quelconque des trois parties proportionnelles, est à la partie de 120 qui lui répond.

La règle se réduit donc, 1°. à faire une totalité des parties proportionnelles données; 2°. à faire autant de règles de Trois qu'il y a de parties à trouver, et dont chacune aura, pour premier terme la somme des parties proportionnelles données; pour second terme, le nombre proposé à diviser; et pour troisième terme, l'une des parties proportionnelles données : ainsi dans la question que nous avons prise pour exemple, on aurait ces trois règles de trois à faire.

9 : 120 :: 4 :
9 : 120 :: 3 :
9 : 120 :: 2 :

Dont on trouvera (179) que les quatrièmes termes sont $53\frac{1}{3}$, 40, $26\frac{2}{3}$ qui ont entre les deux rapports demandés, et qui composent en effet le nombre 120.

Mais il est aisé de remarquer qu'il n'est pas absolument nécessaire de faire autant de règles de Trois qu'il y a de parties à trouver; on peut se dispenser de la dernière, en retranchant du nombre proposé la somme des autres parties, quand on les a trouvées.

EXEMPLE II.

Trois personnes ont à partager le bénéfice de la prise d'un vaisseau. La première a fait un fonds de 20000#; la seconde, de 60000#; la troisième, de 120000# : on demande ce qui revient à chacune, sur la prise estimée 800000#; tous frais faits.

On voit qu'il s'agit de partager 800000#, en parties qui aient entr'elles les mêmes rapports que 20000, 60000, 120000#, ou (170) que 2, 6, 12, puisque chacun doit avoir proportionnellement à sa mise; il faut donc ajouter les trois parties proportionnelles 2, 6, 12, et faire les trois proportions suivantes, ou seulement deux.

20 : 800000 :: 2# : la première partie.
20 : 800000 :: 6# : la seconde partie.
20 : 800000 :: 12# : la troisième partie.

Ces trois parties seront 80000#, 240000#, 480000#.

La question pourrait être plus compliquée, et cependant être ramenée aux mêmes principes, comme dans l'exemple qui suit.

EXEMPLE III.

Trois personnes ont mis en société, la première, 3000#, qui ont été pendant six mois dans la société; la seconde, 4000#, qui y ont été pendant cinq mois; et la troisième, 8000#, qui y ont resté pendant neuf mois; combien chacun doit-il avoir sur le bénéfice, qui monte à 12050#?

On réduira toutes les mises à un même temps, en cette manière.

La mise de 3000# a dû produire, pendant six mois, autant que 6 fois 3000# ou 18000#, pendant un mois.

La mise de 4000# a dû produire pendant cinq mois, autant que 5 fois 4000# ou 20000#, pendant un mois.

Enfin la mise de 8000# a dû produire en neuf mois, autant que 9 fois 8000#, ou 72000# pendant un mois.

Ainsi la question est réduite à cette autre : les mises de trois associés sont 18000#, 20000#, 72000#, combien revient-il à chacun sur le gain de 12050#?

En procédant comme dans l'exemple ci-dessus, on trouvera $1971^{\#}\ 16^{s}\ 4^{d}\ \frac{4}{11}$, $2190^{\#}\ 18^{s}\ 2^{d}\ \frac{2}{11}$, $7887^{\#}\ 5^{s}\ 5^{d}\ \frac{5}{11}$.

Remarque au sujet de la Règle précédente.

198. Il n'est pas inutile d'examiner un cas qui peut embarrasser les commençans. Si l'on proposait cette question, partager 650 en trois parties, dont la première soit à la seconde :: 5 : 4, et dont la première soit à la troisième :: 7 : 3.

On ne peut pas appliquer ici la règle précédente, sans une préparation qui consiste à rendre la même, dans chaque rapport donné, la partie proportionnelle de l'une des trois parts cherchées; par exemple, celle de la première; cela s'exécute aisément, en multipliant les deux termes de chaque rapport,

par le premier terme de l'autre rapport : ainsi les deux rapports 5:4 et 7:3, seront ramenés à avoir un même premier terme, en multipliant les deux termes du premier par 7, et les deux termes du second par 5, ce qui n'en change pas la valeur (170), et donne les rapports 35:28 et 35:15; ensorte que la question se réduit à partager 650, en trois parties qui soient entr'elles comme les nombres 35, 28 et 15; ce qui se fera aisément par la règle précédente.

Si l'on demandait de partager un nombre en quatre parties, dont la première fût à la seconde ::5:4, la première à la troisième ::9:5, et la première à la quatrième ::7:3, on réduirait ces rapports à avoir un même premier terme, en multipliant les deux termes de chacun par le produit des premiers termes des deux autres; ainsi dans cet exemple on changerait ces trois rapports, en ces trois autres, 315:252, 315:175, 315:135; ensorte que la question se réduit à partager le nombre proposé, en quatre parties qui soient entr'elles, comme les nombres 315, 252, 175 et 135.

De quelques autres Règles dépendantes des Proportions.

199. * Quoique les règles suivantes soient d'un usage moins fréquent que les précédentes, nous ne pouvons cependant les omettre absolument : outre qu'elles ne sont pas sans utilité par elles-mêmes, elles sont d'ailleurs propres à faire sentir l'étendue des usages des proportions.

200. La première dont nous parlerons est la Règle *d'une fausse position*. On l'applique souvent à résoudre des questions qui appartiennent à la règle de Société, dont elle diffère, en ce qu'au lieu de prendre les parties proportionnelles telles qu'elles sont données par l'énoncé de la question, elle en prend une arbitrairement, et y subordonne les autres conformément à la question ; ce qui rend le calcul un peu plus facile.

EXEMPLE I.

Partager 640# entre trois personnes, dont la seconde ait le quadruple de la première, et la troisième deux fois et $\frac{1}{3}$ autant que les deux autres ensemble.

Je prends arbitrairement, pour représenter la première partie, le nombre 3 dont je puis prendre commodément le $\frac{1}{3}$.

La première partie étant 3, la seconde sera 12, et la troisième sera 35.

La question est réduite à partager 640 en trois parties, qui soient entr'elles comme les 3 nombres 3, 12 et 35; ce qui se fera comme il a été dit (197).

La règle d'une fausse position sert aussi à résoudre des questions qui sont en quelque façon l'inverse de celles de la règle de Société, puisqu'il s'agit de revenir de la somme de quelques parties d'un nombre à ce nombre même, comme dans l'exemple qui suit.

EXEMPLE II.

On demande de trouver un nombre dont le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{5}$ et les $\frac{3}{7}$, fassent 808. Je prends un nombre dont je puisse avoir commodément le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{5}$ et le $\frac{1}{7}$; (ce qui est facile en multipliant les trois dénominateurs). Ce nombre sera 105; j'en prends le $\frac{1}{3}$, qui est 35, le $\frac{1}{5}$ qui est 21, et les $\frac{3}{7}$ qui sont 45; j'ajoute ces trois nombres, et j'ai 101, qui est composé des parties de 105, de la même manière que 808 l'est de celles du nombre en question : donc le nombre en question doit avoir même rapport à 808 que 105 à 101; il doit donc être le quatrième terme d'une proportion qui commencerait par ces trois-ci....

$$101 : 105 :: 808 :$$

Ce quatrième terme est 840, dont 808 renferme en effet le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{5}$ et les $\frac{3}{7}$.

201. La seconde règle dont nous parlerons est celle des deux fausses positions. Elle sert dans les questions où il s'agit de partager, non pas le nombre même proposé, mais seulement une partie de ce nombre, en parties proportionnelles à des nombres donnés; l'exemple suivant fera connaître la règle et son usage.

EXEMPLE.

Il s'agit de partager 6954# en trois personnes, de manière que la seconde ait autant que la première, et 54# de plus, et que la troisième ait autant que les deux autres ensemble, et 78# de plus.

Sans les 54 et les 78#, il est clair qu'il ne s'agirait que de partager le nombre proposé en parties proportionnelles aux nombres 1, 1 et 2; mais puisqu'il faut prélever sur la somme, 54# pour la seconde personne, et 54# plus 78# pour la troisième, il est évident qu'il n'y a qu'une partie du nombre proposé qu'on doit partager en parties proportionnelles à 1, 1 et 2: comme cette partie, qui est facile à trouver dans l'exemple actuel, peut être plus difficile à apercevoir dans d'autres circonstances, on suit la méthode que voici.

Supposons, pour la première part, tel nombre que nous voudrons, par exemple, 1#; la seconde part sera 1# plus 54#, c'est-à-dire 55#; et la troisième sera 1# plus 55#, plus 78#; c'est-à-dire 134#: la totalité de ces parts est 190#.

S'il n'eût été question que de partager en parties proportionnelles à 1, 1 et 2; la première part étant toujours supposée 1#, la seconde serait 1#, la troisième

serait 2#, et la totalité serait 4#, dont la différence avec 190#, c'est-à-dire 186#; est ce qu'il faut prélever sur la somme proposée 6954#, ce qui la réduit à 6768#, il reste donc à partager 6768# en parties proportionnelles à 1, 1 et 2, selon les règles ci-dessus; et ayant trouvé que la première partie est 1692#, on en conclut que les deux autres parts demandées sont 1746# et 3516#; en effet, la totalité de ces trois parts est 6954.

202. On trouve encore, chez les Arithméticiens, plusieurs autres règles qui ne sont autre chose que l'application des règles de Trois, à différentes questions, telles que les questions d'*Intérêt*, de *Change*, d'*Escompte*, etc.

Nous n'entrerons pas dans ces détails, qui ne peuvent avoir de difficulté pour ceux qui, ayant bien saisi les principes établis ci-dessus, auront en même temps l'état de la question présent à l'esprit. Nous nous bornerons à un seul exemple.

Une personne a fait à un marchand un billet de 2854#, payable dans un an; elle vient acquitter son billet au bout de 7 mois, et le marchand consent de diminuer, pour les 5 mois restans, les intérêts qui ont été compris dans le billet, à raison de 6 pour cent pour 12 mois; on demande pour quelle somme le marchand doit rendre le billet.

Puisque 12 mois produisent 6 pour 100 d'intérêt, 7 mois ont dû produire un intérêt qu'on trouvera en cherchant le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers sont.....

$$12 : 7 :: 6 :$$

Ce quatrième terme sera $\frac{42}{12}$ ou $3\frac{1}{2}$. Or, quand l'intérêt a été pris à 6 pour 100, on a compté pour 106# ce qui ne valait que 100#; donc quand l'intérêt est à $3\frac{1}{2}$ on compte pour $103\frac{1}{2}$, ce qui ne vaut que 100; il faut donc actuellement que ce qui devait être payé 106 ne soit plus payé que $103\frac{1}{2}$. Ainsi la somme cherchée doit être le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont....

$$106 : 103\frac{1}{2} :: 2854\# :$$

Ce quatrième terme qui est 2786# 13^{s} 9^{d} $\frac{30}{106}$ ou $\frac{15}{53}$, est la somme que le débiteur doit donner pour retirer son billet.

De la Règle d'Alliage.

203. Les questions qui appartiennent à cette règle sont de deux sortes.

Dans l'une, il s'agit de trouver la valeur moyenne de plusieurs sortes de choses, dont le nombre et la valeur particulière de chacune sont connus.

Dans la seconde, il s'agit de connaître les quantités de chaque espèce de choses qui entrent dans un ou plusieurs mélanges, lorsqu'on connaît le prix ou la valeur de chaque espèce, et le prix ou la valeur totale de chaque mélange.

Nous réservons les questions de la seconde sorte pour l'Algèbre.

Quant aux questions de la première, voici la règle pour les résoudre.

Multipliez la valeur de chaque espèce de choses, par le nombre des choses de cette espèce, ajoutez tous les produits et divisez la somme par le nombre total des choses de toutes les espèces.

EXEMPLE.

On emploie 200 ouvriers, dont 50 sont payés à raison de 40 sous par jour, 70 à raison de 30 sous, 50 à raison de 25 sous, et 30 à raison de 20 sous; à combien chaque ouvrier revient-il par jour, l'un portant l'autre?

50 ouvriers à 40 sous par jour font une dépense

de	2000^{s}
70 à 30^{s}	2100
50 à 25	1250
30 à 20	600
	5950^{s}

La dépense de 200 ouvriers est donc de 5950^{s} par jour, et par conséquent (en divisant par 200), chaque ouvrier revient, l'un portant l'autre, à 29^{s} 9^{d} par jour. Les autres questions de cette espèce sont si faciles à résoudre d'après cet exemple, que nous croyons à propos de ne pas insister sur cette matière.

Des Progressions Arithmétiques.

204. La progression arithmétique est une suite de termes dont chacun surpasse celui qui le précède, ou en est surpassé de la même quantité.

Par exemple, cette suite.....

÷ 1.4.7.10.13.16.19.22.25, etc.

est une progression arithmétique, parce que chaque terme y surpasse celui qui le précède, d'une même quantité qui est ici 3.

Les deux points séparés par une barre, qu'on voit ici à la tête de la progression, sont destinés à marquer qu'en énonçant cette progression, on doit répéter chaque terme, excepté le premier et le dernier, en cette manière, 1 *est à* 4 *comme* 4 *est à* 7, *comme* 7 *est à* 10, etc.

La progression est dite *croissante* ou *décroissante*, selon que les termes vont en augmentant ou en diminuant; mais comme les propriétés de l'une et de l'autre sont les mêmes, en changeant seulement les mots *plus* en *moins*, *ajouter* en *soustraire*, et *multiplier* en *diviser*, nous la considérerons ici uniquement comme croissante.

205. On voit donc, d'après la définition de la progression arithmétique, qu'avec le premier terme et la différence commune, ou la raison de la progression, on peut former tous les autres termes, en ajoutant consécutivement cette raison; et que par conséquent :

Le second terme est composé du premier, plus la raison.

Le troisième est composé du second, plus la raison, et par conséquent du premier, plus deux fois la raison.

Le quatrième est composé du troisième, plus la raison, et par conséquent du premier, plus trois fois la raison, et ainsi de suite.

206. De sorte qu'on peut dire, en général, qu'*un terme quelconque d'une progression arithmétique, est composé du premier, plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.*

207. Donc si le premier terme était zéro, tout autre terme de la progression serait égal à autant de fois la raison qu'il y aurait de termes avant lui.

208. Ce principe peut avoir les deux applications suivantes :

1°. Il sert à trouver un terme quelconque d'une progression, sans qu'on soit obligé de calculer ceux qui le précèdent. Qu'on demande, par exemple, quel serait le 100ᵉ terme de cette progression :

$\div 4.9.14.19.24$, etc.

Puisque ce terme cherché doit être le centième, il y a donc 99 termes avant lui; il est donc composé du premier terme 4, et de 99 fois la raison 5; il est donc 4 plus 495, c'est-à-dire 499.

209. 2°. Ce même principe sert à lier deux nombres quelconques par une suite de tant d'autres nombres qu'on voudra, de manière que le tout forme une progression arithmétique; ce qu'on appelle *insérer* entre deux nombres donnés plusieurs *moyens proportionnels arithmétiques*, ou simplement, plusieurs *moyens arithmétiques*.

Par exemple, on peut lier 1 et 7 par cinq nombres qui fassent une progression arithmétique avec 1 et 7; ces nombres sont 2, 3, 4, 5, 6; mais comme il n'est pas toujours aisé de voir, du premier coup d'œil, quels doivent être ces nombres, voici comment on peut les trouver à l'aide du principe que nous venons de poser.

Il ne s'agit que de trouver la raison qui doit régner dans cette progression.

Or le plus grand des deux nombres proposés devant être le dernier terme de la progression, doit être composé du premier, c'est-à-dire du plus petit de ces deux nombres, plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui; donc si du plus grand de ces deux nombres on retranche le plus petit, le reste sera composé d'autant de fois la raison qu'il doit y avoir de termes avant le plus grand; c'est-à-dire qu'il est le produit de la multiplication de cette raison par le nombre des termes qui précèdent le plus grand; donc (74) si l'on divise ce reste par le nombre des termes qui doivent précéder le plus grand, on aura cette raison.

Or le nombre des termes qui doivent précéder le plus grand, est plus grand d'une unité que le nombre des moyens qu'on veut insérer entre les deux; donc *pour insérer entre deux nombres donnés tant de moyens arithmétiques qu'on voudra, il faut retrancher le plus petit de ces deux nombres, du plus grand, et diviser le reste par le nombre des moyens augmenté d'une unité.*

Le quotient sera la différence ou la raison qui doit régner dans la progression.

Par exemple, si entre 4 et 11 on demande d'insérer 8 moyens arithmétiques, je retranche 4 de 11, il me reste 7 que je divise par 9, nombre de moyens augmenté de l'unité; le quotient $\frac{7}{9}$ est la différence qui doit régner dans la progression, qui sera par conséquent,

$$\div 4 \,.\, 4\tfrac{7}{9} \,.\, 5\tfrac{5}{9} \,.\, 6\tfrac{3}{9} \,.\, 7\tfrac{1}{9} \,.\, 7\tfrac{8}{9} \,.\, 8\tfrac{6}{9} \,.\, 9\tfrac{4}{9} \,.\, 10\tfrac{2}{9} \,.\, 11.$$

Pareillement, si l'on demandait neuf moyens arithmétiques entre 0 et 1; retranchant 0 de 1, il reste 1 qu'il faudrait diviser par 10, nombre des moyens augmenté de l'unité, ce qui donne $\frac{1}{10}$ ou 0,1 pour la raison. Et par conséquent la progression sera

$$\div 0.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 9.\ 1.$$

210. On voit par là, qu'entre deux nombres, si voisins qu'ils puissent être l'un de l'autre, on peut toujours insérer tant de moyens arithmétiques qu'on voudra.

Nous n'en dirons pas davantage sur les progressions arithmétiques, que nous ne traitons ici que par rapport aux logarithmes dont nous parlerons plus bas; nous aurons occasion d'y revenir ailleurs.

Des Progressions Géométriques.

211. La progression géométrique est une suite de termes dont chacun contient celui qui le précède, ou est contenu en lui le même nombre de fois. Par exemple, cette suite :

$$:: 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192$$

est une progression géométrique, parce que chaque terme contient celui qui le précède, le même nombre de fois qui est ici 2.

Ce nombre de fois est ce qu'on appelle *la raison* de la progression.

Les quatre points qui précèdent la progression ont la même signification que les deux points qui précèdent la progression arithmétique (204). Mais on en met quatre pour avertir que la progression est géométrique.

La progression est dite *croissante* ou *décroissante*, selon que les termes vont en augmentant ou en diminuant.

Nous considérerons toujours la progression géométrique comme croissante, parce que les propriétés sont les mêmes dans l'une et dans l'autre, en changeant le mot de *multiplier* en celui de *diviser*, et celui de *contenir*, en ceux de *être contenu*.

Puisque le second terme contient le premier autant de fois qu'il y a d'unités dans la raison, il est donc composé du premier multiplié par la raison.

Puisque le troisième terme contient le second autant de fois qu'il y a d'unités dans la raison, il est donc composé du second multiplié par la raison, et par conséquent du premier multiplié par la raison, et encore multiplié par la raison; c'est-à-dire du premier multiplié par le carré, ou la seconde puissance de la raison.

Puisque le quatrième terme contient le troisième autant de fois qu'il y a d'unités dans la raison, il est donc composé du troisième multiplié par la raison, et par conséquent du premier multiplié par le carré de la raison, et encore multiplié par la raison; c'est-à-dire multiplié par le cube, ou la troisième puissance de la raison.

Par exemple, dans *la progression ci-dessus*, 6 est composé du premier terme 3 multiplié par la raison 2; 12 est composé du premier terme 3, multiplié par le carré 4 de la raison 2; 24 est composé du premier terme 3 multiplié par le cube 8 de la raison 2.

212. En continuant le même raisonnement, on voit qu'un *terme quelconque de la progression géométrique, est composé du premier multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent ce terme quelconque.*

Donc si le premier terme de la progression est l'unité, chaque autre terme sera formé de la raison même élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui le précèdent; car la multiplication par le premier terme, qui est l'unité, n'augmente point le produit.

Pour élever un nombre à une puissance proposée, à la septième, par exemple, il faut, suivant l'idée que nous avons donnée des puissances, multiplier ce nombre par lui-même six fois consécutives. Ainsi pour élever 2 à la septième puissance, je dirais : 2 fois 2 font 4, 2 fois 4 font 8, 2 fois 8 font 16, 2 fois 16 font 32, 2 fois 32 font 64, 2 fois 64 font 128, ce qui serait la septième puissance de 2 ; mais on peut abréger l'opération en diverses manières, par exemple, je puis d'abord carrer 2, ce qui fait 4 ; cuber ce 4, ce qui donne 64, et multiplier 64 par 2, ce qui fait 128 ; ou bien je puis cuber 2, ce qui donne 8 ; carrer 8, ce qui donne 64, et multiplier 64 par 2, ce qui donne 128 ; en un mot, peu importe de quelle façon on s'y prenne, pourvu que 2 se trouvent 7 fois facteur dans le produit.

213. Le principe que nous venons de poser (212) sur la formation d'un terme quelconque de la progression, et la remarque que nous venons de faire, peuvent servir à calculer tel terme qu'on voudra de la progression, sans être obligé de calculer ceux qui le précèdent. Si l'on demande, par exemple, quel serait le douzième terme de la progression.....

∺ 3 : 6 : 12 : 24 :, etc.

Comme je sais (212) que ce douzième terme doit être composé du premier, multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent ce douzième, je vois que, pour le former, il faut multiplier 3 par la onzième puissance de la raison 2. Pour former cette onzième puissance, je cube 2, ce qui me donne 8 ; je cube 8, ce qui me donne 512 pour la neuvième puissance, et enfin je multiplie 512, neuvième puissance de la raison, par 4, seconde puissance, et j'ai 2048 pour la onzième puissance de 2 ; je multiplie donc 2048 par 3, et j'ai 6144 pour le douzième terme de la progression.

214. Une autre application qu'on peut faire du même principe, c'est pour trouver tant de moyens proportionnels géométriques qu'on voudra, entre deux nombres donnés. Si l'on demandait trois moyens géométriques entre 4 et 64 ; avec un peu

d'attention, on voit que ces trois moyens géométriques sont 8, 16, 32. En effet, ÷÷4:8:16:32:64 forment une progression géométrique; mais si l'on proposait d'autres nombres que 4 et 64, ou que l'on demandât tout autre nombre de moyens géométriques, on ne les trouverait pas aussi facilement.

Or voici comment on peut les trouver en vertu du principe dont il s'agit.

La question se réduit à trouver la raison qui doit régner dans la progression, parce que, quand elle sera trouvée, on formera aisément les termes, par des multiplications successives par cette raison.

Qu'il soit question, par exemple, de trouver neuf moyens géométriques entre 2 et 2048.

2048 sera donc le dernier terme d'une progression géométrique qui commence par 2, et qui doit avoir neuf termes entre le premier et le dernier. 2048 est donc composé du premier terme 2 multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui doivent précéder 2048; donc (69) si l'on divise 2048 par le premier terme, le quotient sera la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui doivent précéder 2048; donc en cherchant quelle est la racine de cette puissance, on aura la raison : or cette puissance doit être la dixième, puisque devant y avoir neuf termes entre 2 et 2048, il y en a nécessairement dix avant 2048; donc il faut extraire la racine dixième du quotient qu'aura donné le plus grand nombre 2048 divisé par le plus petit 2.

215. Comme on peut faire le même raisonnement dans tous les cas, concluons donc en général que, *pour insérer entre deux nombres donnés, tant de moyens géométriques qu'on voudra, il faut diviser le plus grand de ces deux nombres par le plus petit, ce qui donnera un quotient; on extraira de ce quotient une racine du degré marqué par le nombre des moyens augmenté de l'unité.*

Ainsi pour revenir à notre exemple, je divise 2048 par 2,

ce qui me donne 1024, dont je cherche la racine dixième (*); elle est 2; donc la racine est 2. Ainsi, pour former les moyens en question, je multiplie le premier terme 2 continuellement par la raison 2; et après avoir formé neuf moyens, je retombe sur 2048, comme on le voit ici :

:: 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048.

Pareillement, si l'on demandait de trouver quatre moyens géométriques entre 6 et 48, je diviserais 48 par 6, et du quotient 8, je tirerais la racine cinquième; comme 8 n'a pas de racine cinquième exacte, on ne peut jamais assigner exactement en nombres, quatre moyens géométriques entre 6 et 48; mais on peut approcher de cette racine, si près qu'on le voudra, par une méthode analogue à celles de la racine carrée et de la racine cubique, et que nous ferons connaître dans l'Algèbre. En attendant, il suffit qu'on conçoive qu'il est possible de trouver un nombre qui, multiplié quatre fois de suite par lui-même, approche de plus en plus de reproduire 8; et qu'il en est de même pour tout autre nombre et pour toute autre racine; et de là nous conclurons qu'entre deux nombres quelconques, on peut toujours trouver tant de moyens géométriques qu'on voudra, soit exactement, soit par une approximation poussée à tel degré qu'on voudra, et c'est tout ce qu'il nous faut pour passer aux Logarithmes.

Des Logarithmes.

216. Les *Logarithmes* sont des nombres en progression arith-

(*) Nous n'avons pas donné de méthode pour extraire la racine dixième d'un nombre; mais il en est de celle-ci comme de la racine carrée et de la racine cubique : la racine carrée ne doit avoir qu'un chiffre lorsque le nombre proposé n'en a pas plus de 2; la racine cubique ne doit avoir qu'un chiffre, lorsque le nombre proposé n'en a pas plus de trois; pareillement la racine dixième n'aura jamais qu'un chiffre, tant que le nombre proposé n'en aura pas plus de dix; il en est de même pour les autres racines; la trentième, par exemple, n'aura qu'un chiffre, si le nombre proposé n'a pas plus de trente chiffres; cela se démontre, comme on l'a fait pour la racine carrée et la racine cubique.

métique, qui répondent, terme pour terme, à une pareille suite de nombres en progression géométrique. Si l'on a, par exemple, la progression géométrique, et la progression arithmétique suivantes.....

∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256, etc.
: 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17, etc.

Chaque terme de la suite inférieure, est dit le logarithme du terme qui est à pareille place dans la suite supérieure.

217. Un même nombre peut donc avoir une infinité de logarithmes différens, puisqu'à la même progression géométrique on peut faire correspondre une infinité de progressions arithmétiques différentes. Comme nous ne considérons ici les logarithmes que par rapport à l'usage qu'on peut en faire dans les calculs numériques, nous ne nous arrêterons pas à considérer les différentes progressions géométriques et arithmétiques qu'on pourrait comparer entre elles ; nous passons tout de suite à celles qu'on a considérées dans la formation des Tables de Logarithmes.

218. On a choisi pour progression géométrique, la progression décuple, et pour progression arithmétique, la suite naturelle des nombres ; c'est-à-dire qu'on a choisi les deux progressions suivantes :

∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000
: 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6.

219. Ainsi il sera toujours aisé de reconnaître quel est le logarithme de l'unité suivie de tant de zéros qu'on voudra ; il a toujours autant d'unités qu'il y a de zéros à la suite de cette unité.

Nous n'enseignerons pas ici la méthode qu'on a suivie pour trouver les logarithmes des termes intermédiaires de la progression décuple ; elle dépend de principes que nous ne pouvons exposer ici ; mais nous allons expliquer cette formation par une voie qui, à la vérité, ne serait pas la plus expéditive pour calculer ces logarithmes, mais qui suffit, tant pour concevoir cette

formation, que pour rendre raison des usages auxquels on emploie ces nombres artificiels.

220. D'après la définition que nous avons donnée des logarithmes, on voit que pour avoir le logarithme d'un nombre quelconque, de 3, par exemple, il faut que ce nombre puisse faire partie de la progression géométrique fondamentale. Or, quoiqu'on ne voie pas que 3 puisse faire partie de la progression géométrique ÷÷1:10:100, etc.; cependant on voit que si, entre 1 et 10, on insérait un très-grand nombre de moyens géométriques (214), comme on monterait alors de 1 à 10 par des degrés d'autant plus serrés que le nombre de ces moyens serait plus grand, il arriverait de deux choses l'une; ou que quelqu'un de ces moyens se trouverait être précisément le nombre; ou que du moins il s'en trouverait deux consécutifs, entre lesquels le nombre 3 serait compris, et dont chacun différerait d'autant moins de 3, que le nombre des moyens insérés serait plus grand.

Cela posé, si l'on insérait pareillement entre 0 et 1 autant de moyens arithmétiques qu'on a inséré de moyens géométriques entre 1 et 10, chaque terme de la progression géométrique ayant pour logarithme le terme correspondant de la progression arithmétique, on prendrait dans celle-ci, pour logarithme de 3, le nombre qui s'y trouverait à pareille place que 3 se trouve dans la progression géométrique: ou si 3 n'était pas exactement quelqu'un des termes de celle-ci; on prendrait dans la progression arithmétique, le terme qui répondrait à celui de la progression géométrique, qui approche le plus du nombre 3.

C'est ainsi qu'on pourrait s'y prendre en effet, si l'on n'avait pas de moyens plus expéditifs. Quoi qu'il en soit, c'est à cela que revient le calcul des logarithmes.

221. Il faut donc se représenter qu'ayant inséré 10000000 moyens géométriques entre 1 et 10, pareil nombre entre 10 et 100, pareil nombre entre 100 et 1000, etc. on a inséré aussi pareil nombre de moyens arithmétiques entre 0 et 1, pareil

nombre entre 1 et 2, pareil nombre entre 2 et 3; qu'ayant rangé tous les premiers sur une même ligne, et tous les seconds au-dessous, on a cherché dans la première le nombre le plus approchant de 2, et on a pris dans la suite inférieure le nombre correspondant; qu'on a cherché de même dans la première le nombre le plus approchant de 3, et qu'on a pris dans la suite inférieure, le nombre correspondant; qu'on en a fait de même successivement, pour les nombres 4, 5, 6, etc.; qu'enfin ayant transporté dans une même colonne, comme on le voit dans la table ci-jointe, les nombres 1, 2, 3, 4, 5, etc., on a écrit dans une colonne à côté, les termes de la progression arithmétique, qu'on a trouvés correspondans à ceux-là, ou du moins ceux qui en approchaient le plus; alors on aura l'idée de la formation des logarithmes, et de leur disposition dans les tables ordinaires.

Table des Logarithmes des Nombres naturels, depuis 1 jusqu'à 200.

Nomb.	*Logar.*	*Nomb.*	*Logar.*	*Nomb.*	*Logar.*	*Nomb.*	*Logar.*
0	Inf. nég.	51	1,707570	102	2,008600	153	2,184691
1	0,000000	52	1,716003	103	2,012837	154	2,187521
2	0,301030	53	1,724276	104	2,017033	155	2,190332
3	0,477121	54	1,732394	105	2,021189	156	2,193125
4	0,602060	55	1,740363	106	2,025306	157	2,195900
5	0,698970	56	1,748188	107	2,029384	158	3,198657
6	0,778151	57	1,755875	108	2,033424	159	2,201397
7	0,845098	58	1,763428	109	2,037426	160	2,204120
8	0,903090	59	1,770852	110	2,041393	161	2,206826
9	0,954243	60	1,778151	111	2,045323	162	2,209515
10	1,000000	61	1,785330	112	2,049218	163	2,212188
11	1,041393	62	1,792392	113	2,053078	164	2,214844
12	1,079181	63	1,799341	114	2,056905	165	2,217484
13	1,113943	64	1,806180	115	2,060698	166	2,220108
14	1,146128	65	1,812913	116	2,064458	167	2,222716
15	1,176091	66	1,819544	117	2,068186	168	2,225309
16	1,204120	67	1,826075	118	2,071882	169	2,227887
17	1,230449	68	1,832509	119	2,075547	170	2,230449
18	1,255273	69	1,838849	120	2,079181	171	2,232996
19	1,278754	70	1,845098	121	2,082785	172	2,235528
20	1,301030	71	1,851258	122	2,086360	173	2,238046
21	1,322219	72	1,857332	123	2,089905	174	2,240649
22	1,342423	73	1,863323	124	2,093422	175	2,243038
23	1,361728	74	1,869232	125	2,096910	176	2,245513
24	1,380211	75	1,875061	126	2,100371	177	2,247973
25	1,397940	76	1,880814	127	2,103804	178	2,250420
26	1,414973	77	1,886491	128	2,107210	179	2,252853
27	1,431364	78	1,892095	129	2,110590	180	2,255273
28	1,447158	79	1,897627	130	2,113943	181	2,257679
29	1,462398	80	1,903090	131	2,117271	162	2,260071
30	1,477121	81	1,908485	132	2,120574	183	2,262451
31	1,491362	82	1,913814	133	2,123852	184	2,264818
32	1,505150	83	1,919078	134	2,127105	185	2,267172
33	1,518514	84	1,924279	135	2,130334	186	2,269513
34	1,531479	85	1,929419	136	2,133539	187	2,271842
35	1,544068	86	1,934498	137	2,136721	188	2,274158
36	1,556303	87	1,939519	138	2,139879	189	2,276462
37	1,568202	88	1,944483	139	2,143015	190	2,278754
38	1,579784	89	1,949390	140	2,146128	191	2,281033
39	1,591065	90	1,954243	141	2,149219	192	2,283301
40	1,602060	91	1,959041	142	2,152288	193	2,285557
41	1,612784	92	1,963788	143	2,155336	194	2,287802
42	1,623249	93	1,968483	144	2,158362	195	2,290035
43	1,633468	94	1,973128	145	2,161368	196	2,292256
44	1,643453	95	1,977724	146	2,164353	197	2,294466
45	1,653213	96	1,982271	147	2,167317	198	2,296665
46	1,662758	97	1,986772	148	2,170262	199	2,298853
47	1,672098	98	1,991226	149	2,173186	200	2,301030
48	1,681241	99	1,995635	150	2,176090		
49	1,690196	100	2,000000	151	2,178977		
50	1,698970	101	2,004321	152	2,181844		

Les Logarithmes renfermés dans cette table n'ont que six chiffres après la virgule; ils en ont 7 dans les tables ordinaires; mais cette différence ne nuit en rien à l'usage que nous en ferons ci-après.

222. Remarquons au sujet de cette Table, que le premier chiffre de la droite de chaque logarithme, s'appelle le *Caractéristique*, parce que c'est par ce chiffre qu'on peut juger dans quelle décade est compris le nombre auquel appartient ce logarithme; par exemple, si un nombre a pour caractéristique 3, je sais qu'il appartient à des mille, parce que le logarithme de 1000 est 3, et que celui de 10000 étant 4, tout nombre depuis 1000 jusqu'à 10000 ne peut avoir pour logarithme que 3 et une fraction; il a donc 3 pour caractéristique, et les autres chiffres expriment cette fraction réduite en décimales.

Propriétés des Logarithmes.

223. Comme il ne s'agit ici que des logarithmes tels qu'ils sont dans les tables ordinaires, les propriétés que nous allons exposer, ne regardent que les progressions géométriques qui ont l'unité pour premier terme, et les progressions arithmétiques qui ont zéro pour premier terme.

Comparons donc encore, terme à terme, une progression géométrique quelconque, mais dont le premier terme soit l'unité, avec une progression aussi quelconque, mais dont le premier terme soit zéro; par exemple, les deux progressions suivantes....

∺ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561, etc.
÷ 0 . 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32, etc.

Il suit de la nature et de la correspondance parfaite de ces deux progressions, qu'autant de fois la raison de la première est facteur dans l'un quelconque des termes de cette progression, autant de fois la raison de la seconde est contenue dans le terme 2187, la raison 3 est 7 fois facteur, et dans le terme 28, la raison 4 est contenue sept fois.

En effet, selon ce qui a été dit (206 et 212), la raison est

facteur dans un terme quelconque de la première, autant de fois qu'il y a de termes avant celui-là ; et dans la seconde, un terme quelconque est composé d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui. Or, il y a le même nombre de termes de part et d'autre.

Concluons de là, qu'un terme quelconque de la progression géométrique, aura toujours pour correspondant dans la progression arithmétique, un terme qui contiendra la raison de celle-ci, autant de fois que la raison de la première est facteur dans le terme quelconque dont il s'agit.

224. Donc, *si l'on multiplie, l'un par l'autre, deux termes de la progression géométrique, et si l'on ajoute en même temps les deux termes correspondans de la progression arithmétique, le produit et les sommes seront deux termes qui se correspondront dans ces progressions.*

Car il est évident que la raison sera facteur dans le produit, autant qu'elle l'est, tant dans l'un des termes multipliés, que dans l'autre ; et que la raison de la progression arithmétique sera contenue dans la somme, autant qu'elle l'est, tant dans l'un des termes ajoutés que dans l'autre.

225. Donc on peut, par l'addition seule des deux termes de la progression arithmétique, connaître le produit des deux termes correspondans de la progression géométrique, en supposant ces deux progressions prolongées suffisamment.

Par exemple, en ajoutant les deux termes 8 et 24, qui répondent à 9 et à 729, j'ai 32 qui répond à 6561 ; d'où je conclus que le produit de 729 par 9 est 6561 ; ce qui est en effet.

226. Donc, puisque les nombres naturels qui composent la première colonne de la table ci-dessus, ont été tirés d'une progression géométrique qui commence par l'unité ; et puisque leurs logarithmes sont les termes correspondans d'une progression arithmétique qui commence par zéro, il faut en conclure qu'*en ajoutant les logarithmes des deux nombres, on a le logarithme de leur produit.*

De là il est aisé de conclure les usages suivans.

Usage des Logarithmes.

227. *Pour faire une multiplication par logarithmes; il faut ajouter le logarithme du multiplicande au logarithme du multiplicateur ; la somme sera le logarithme du produit ; c'est pourquoi cherchant cette somme parmi les logarithmes des tables, on trouvera le produit à côté;* par exemple, si l'on propose de multiplier 14 par 13.

Je trouve dans la petite table ci-dessus, que le logarithme de 14

est.....	1,146128
et que celui de 13 est.....	1,113943
La somme.....	2,260071

répond dans la même table au nombre 182 qui est en effet le produit.

228. Pour carrer un nombre, il suffit donc de doubler son logarithme, puisqu'il faudrait ajouter ce logarithme à lui-même, pour multiplier le nombre par lui-même.

229. Par une raison semblable, pour cuber un nombre, il faudra tripler son logarithme ; et en général, pour élever un nombre à une puissance quelconque, il faudra prendre son logarithme autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre qui marque cette puissance ; c'est-à-dire, multiplier son logarithme par le nombre qui marque cette puissance, par exemple, pour élever un nombre à la septième puissance, il faudra multiplier par 7 le logarithme de ce nombre.

230. Donc réciproquement, pour extraire la racine carrée, cubique, quatrième, etc. d'un nombre proposé, il faudra diviser le logarithme de ce nombre par 2, 3, 4, etc., c'est-à-dire, en général, par le nombre qui marque le degré de la racine qu'on veut extraire.

Par exemple, si l'on demande la racine carrée de 144, ayant trouvé, dans la table que le logarithme de ce nombre est 2,158362, j'en prends la moitié 1,079181 ; je cherche parmi les logarithmes, à quel endroit se trouve 1,079181 ; il répond à 12, qui est par conséquent la racine carrée de 144.

Si l'on demande la racine septième de 128, je cherche, dans la table, son logarithme que je trouve être 2,107210 ; j'en prends le septième, ou je le divise par 7, et je cherche à quoi répond dans la table le quotient 0,301030 ; il répond à 2, qui est en effet la racine septième de 128.

231. *Pour trouver le quotient de la division d'un nombre par un autre, il faut retrancher le logarithme du diviseur, du logarithme du dividende; chercher dans la table à quel nombre répond le logarithme restant, ce nombre sera le quotient.*

Par exemple, si l'on veut diviser 187 par 17, je cherche dans la table les logarithmes de ces deux nombres, et je trouve

Le logarithme de 187.....	2,271842
Celui de 17.....	1,230449
La différence.....	1,041393

répond, dans la table, à 11 qui est en effet le quotient.

Si la division ne pouvait pas être faite exactement, le logarithme restant ne se trouverait qu'en partie dans la table ; mais nous allons enseigner ci-après ce qu'il faut faire dans ce cas.

La raison de cette règle est fondée sur ce que le quotient multiplié par le diviseur, devant reproduire le dividende (74), le logarithme du quotient, ajouté (227) au logarithme du diviseur, doit donc composer le logarithme du dividende, et par conséquent, le logarithme du quotient vaut le logarithme du dividende, moins celui du diviseur.

232. D'après ce que nous venons de dire, il est très-facile de voir que pour faire une règle de Trois par logarithmes, il faut ajouter le logarithme du second terme au logarithme du troisième, et de la somme retrancher le logarithme du premier.

233. Remarquons que lorsqu'on cherche dans les tables ordinaires, un logarithme résultant de quelques opérations sur d'autres logarithmes ; si l'on ne trouve de différence entre le dernier chiffre de ce logarithme et celui de la table, que sur le dernier chiffre seulement, on doit regarder cette différence comme nulle, parce que les logarithmes de tous les nombres

intermédiaires à la progression décuple, ne sont qu'approchés à environ une demi-unité décimale du septième ordre près.

Des Nombres dont les logarithmes ne se trouvent point dans les Tables.

234. Les fractions et les nombres entiers joints à des fractions, n'ont pas leurs logarithmes dans les tables; il en est de même des racines carrées, cubiques, etc., des nombres qui ne sont pas des puissances parfaites du degré de ces racines.

Si l'on demande le logarithme d'un nombre entier joint à une fraction, il faut d'abord réduire le tout en fraction (86), et ensuite retrancher le logarithme du dénominateur, du logarithme du numérateur. Par exemple, pour avoir le logarithme de $8\frac{3}{11}$ je cherche celui de $\frac{91}{11}$, que je trouve en retranchant 1,041393 logarithme de 11, de 1,959041 logarithme de 91; le reste 0,917648 est le logarithme de $8\frac{3}{11}$ puisque $8\frac{3}{11}$ ou $\frac{91}{11}$, n'est autre chose que 91 divisé par 11 (96).

235. La même raison prouve que, pour avoir le logarithme d'une fraction, il faut retrancher pareillement le logarithme du dénominateur, du logarithme du numérateur; mais comme cette soustraction ne peut se faire, puisque le logarithme du dénominateur sera plus grand que celui du numérateur, on retranchera au contraire le logarithme du numérateur de celui du dénominateur; le reste, qui marquera ce dont il s'en faut que la soustraction ait pu se faire, sera le logarithme de la fraction, en appliquant à ce reste un signe qui marque que la soustraction n'a pas été entièrement faite. Ce signe est celui-ci —, qu'on énonce *moins*. Ainsi le logarithme de la fraction $\frac{1}{91}$ serait —0,917648 (*).

(*) Les nombres précédés du signe — se nomment nombres *négatifs*. Nous

236. Ce signe est destiné à rappeler dans le calcul, que les logarithmes des fractions doivent être employés selon une règle tout opposée à celle que nous avons prescrite pour les logarithmes des nombres entiers, ou des nombres entiers joints à des fractions; c'est-à-dire, que si l'on a à multiplier par une fraction, il faut retrancher le logarithme de cette fraction; si, au contraire, l'on a à diviser par une fraction, il faut ajouter son logarithme.

La raison en est, pour la multiplication, que multiplier par une fraction, revient à multiplier par le numérateur, et à diviser ensuite par le dénominateur; donc, lorsqu'on opère par logarithmes, on doit ajouter le logarithme du numérateur, et retrancher ensuite celui du dénominateur, ou, ce qui revient au même, on doit seulement retrancher l'excès du logarithme du dénominateur sur le logarithme du numérateur : or, cet excès est précisément le logarithme de la fraction. A l'égard de la division, la raison en est aussi facile à saisir. En effet, diviser par $\frac{3}{4}$, par exemple, revient (109) à multiplier par $\frac{4}{3}$; donc, en opérant par logarithmes, il faut ajouter le logarithme de $\frac{4}{3}$, c'est-à-dire (234) la différence du logarithme de 4, au logarithme de 3, ou du logarithme du dénominateur de la fraction proposée, au logarithme de son numérateur.

237. Il peut arriver, et il arrive assez souvent, qu'en convertissant en une seule fraction, l'entier et la fraction dont on cherche le logarithme; il peut arriver, dis-je, que le numérateur soit un nombre qui passe les limites des tables. Par exemple, si l'on demande le logarithme de $53\frac{821}{5704}$, ce nombre réduit en fraction, revient à $\frac{303133}{3704}$, dont le numérateur passe les limites des tables les plus étendues.

---

les ferons connaître plus particulièrement dans l'Algèbre; en attendant nous prévenons que c'est en prendre une idée fausse, que de les regarder comme des nombres au-dessous de zéro. Il n'y a rien au-dessous de zéro.

Il est donc à propos de savoir comment on peut trouver le logarithme d'un nombre qui passe ces limites.

La méthode que nous allons donner n'est pas rigoureuse; mais elle est plus que suffisante pour les usages ordinaires. Avant que de l'exposer, observons :

238. 1°. Qu'en ajoutant 1, 2, 3, etc., unités à la caractéristique du logarithme d'un nombre, on multiplie ce nombre par 10, 100, 1000, etc., puisque c'est ajouter le logarithme de 10, ou de 100, ou de 1000, etc. (219 et 227).

2°. Au contraire, si l'on retranche 1, 2, 3, etc. unités de la caractéristique d'un logarithme, c'est diviser le nombre correspondant par 10, 100, 1000, etc.

239. Cela posé, qu'il soit question de trouver le logarithme de 357859, par exemple.

Je séparerai, par une virgule, sur la droite de ce nombre, autant de chiffres qu'il est nécessaire pour que le reste puisse se trouver dans les tables (*). Ici, par exemple, j'en séparerai deux, ce qui me donnera 3578,59, qui (28) est cent fois plus petit que le nombre proposé 357859.

Je cherche dans les tables le logarithme de 3578, que je trouve être 3,5536403; je prends en même temps à côté de ce logarithme (**), la différence 1214, entre ce même logarithme et celui de 3579, après quoi je fais cette règle de Trois : si pour 1, unité de différence entre les deux nombres 3579 et 3578;

On a 1214 de différence entre leurs logarithmes;

Combien pour 0,59, différence entre les deux nombres 3578,59 et 3578,

Aura-t-on de différence entre leurs logarithmes ? c'est-à-dire

(*) Nous supposons ici que l'on ait entre les mains des Tables ordinaires de logarithmes qui aillent jusqu'à 20000, ou au moins jusqu'à 10000. Celles de M. Rivard et celles de feu M. l'abbé de La Caille sont exactes et commodes.

(**) Ces différences se trouvent dans les Tables, à côté des logarithmes mêmes.

que je cherche le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers sont :

$$1 : 121\tfrac{1}{4} :: 0,59 :$$

Ce quatrième terme est 716,26, ou simplement 716, en négligeant les décimales. J'ajoute donc 716 au logarithme 3,5536403 de 3578, et j'ai 3,5537119 pour logarithme de 3578,59 : il ne s'agit plus, pour avoir celui de 357859, que d'ajouter deux unités à la caractéristique du logarithme qu'on vient de trouver ; et on aura 5,5537119 pour le logarithme cherché, puisque 357859 est 100 fois plus grand que 3578,59.

Si les chiffres qu'on doit séparer sur la droite étaient tous des zéros, après avoir trouvé, dans les Tables, le logarithme de la partie qui reste à gauche, il n'y aurait autre chose à faire qu'à ajouter autant d'unités à la caractéristique, qu'on aurait séparé de zéros.

240. S'il s'agit du logarithme d'un nombre accompagné de décimales, on cherchera ce logarithme, comme si le nombre proposé n'avait point de virgule ; et après l'avoir trouvé, soit immédiatement dans les tables, soit par la méthode qu'on vient de donner (239), on ôtera autant d'unités à la caractéristique, qu'il y a de décimales dans le nombre proposé, parce qu'ayant considéré le nombre comme s'il n'y avait point de virgule, c'est-à-dire comme 10, ou 100, ou 1000, etc. fois plus grand qu'il n'est, on doit le rappeler à sa valeur par une diminution convenable sur la caractéristique de son logarithme (238).

241. Enfin, s'il n'y a que des décimales dans le nombre proposé, on cherchera encore ce nombre dans les tables, comme s'il n'y avait pas de virgule ; et ayant pris le logarithme correspondant, on le retranchera d'autant d'unités qu'il y a de décimales dans ce même nombre, et on fera précéder le reste du signe — ; par exemple, pour avoir le logarithme de 0,03, je cherche celui de 3 qui est 0,477121 ; je le retranche de deux unités, et appliquant au reste le signe —, j'ai —1,522879 pour logarithme de 0,03. En effet, 0,03 n'est autre chose que $\frac{3}{100}$,

or, pour avoir le logarithme de $\frac{3}{100}$, il faut (235) retrancher le logarithme de 3, de celui de 100, et appliquer au reste le signe —.

Des Logarithmes dont les nombres ne se trouvent point dans les Tables.

242. Cette recherche n'est pas moins nécessaire que la précédente. Par exemple, pour la division, il arrive rarement que le quotient soit un nombre entier. Or, si l'on fait l'opération par logarithmes, on ne trouvera dans les tables le logarithme restant, que quand le quotient sera un nombre entier. Il y a une infinité d'autres cas de la même espèce.

243. Proposons-nous d'abord de trouver à quel nombre répond un logarithme proposé, soit qu'il excède les limites des tables, soit qu'il tombe entre les logarithmes des tables.

On retranchera de la caractéristique autant d'unités qu'il sera nécessaire, pour qu'on puisse trouver, dans les tables, les premiers chiffres du logarithme proposé, ainsi préparé. Si tous les chiffres se trouvent alors dans les tables, le nombre cherché sera le nombre même qu'on trouve à côté dans les tables, mais en mettant à sa suite autant de zéros qu'on aura ôté d'unités à la caractéristique (238).

Par exemple, le logarithme 7,2273467 se trouve (après avoir ôté trois unités à la caractéristique), répondre au nombre 16879; j'en conclus que le logarithme proposé 7,2273467, répond à 16879000.

Si l'on ne trouve dans les tables que les premiers chiffres du logarithme, on se conduira comme dans l'exemple qui suit.

Pour trouver à quel nombre appartient le logarithme 5,2432768, j'ôte deux unités à la caractéristique; le logarithme 3,2432768 que j'ai alors, tombe entre les logarithmes de 1750 et 1751 : le nombre auquel il répond est donc 1750 et une fraction.

Afin d'avoir cette fraction, je retranche de mon logarithme

3,2432768, le logarithme de 1750, et j'ai pour différence 2288.

Je prends aussi dans les tables, la différence 2481 entre les logarithmes de 1751 et 1750, après quoi je fais cette règle de Trois :

Si 2481 de différence entre les logarithmes de 1751 et 1750,

Répondent à 1, unité de différence entre ces nombres,

A quelle différence de nombres doit répondre la différence 2288 entre mon logarithme et celui de 1750?

Je trouve pour quatrième terme $\frac{2288}{2481}$; ainsi le logarithme 3,2432768 appartient au nombre $1750\frac{2288}{2481}$, à très-peu de chose près; par conséquent, le logarithme proposé qui appartient à un nombre 100 fois plus grand (238), a pour nombre correspondant $175000\frac{228800}{2481}$; c'est-à-dire $175092\frac{548}{2481}$ ou en réduisant en décimales, il a pour nombre correspondant 175092,22.

244. Si le logarithme proposé tombait entre ceux des tables, il n'y aurait aucune unité à retrancher à la caractéristique, et par conséquent point de zéros à ajouter à la fin de l'opération, qu'on ferait d'ailleurs de la même manière.

245. Mais comme la proposition que nous employons dans cette méthode n'est pas rigoureusement exacte (*), et qu'elle n'approche de la vérité qu'autant que les nombres cherchés sont grands; si le logarithme proposé tombait au-dessous de celui de 1500, il faudrait, pour plus d'exactitude, ajouter à sa caractéristique autant d'unités qu'on pourrait le faire sans passer les bornes des tables; et ayant trouvé le nombre qui approche le plus d'y répondre dans ces tables, on en sépare-

(*) Cette proportion suppose que les différences des logarithmes sont proportionnelles aux différences des nombres, ce qui n'est jamais exactement vrai, mais approche assez, quand les nombres sont un peu grands, et cela suffit pour les usages ordinaires.

rait sur la droite autant de chiffres par une virgule, qu'on aurait ajouté d'unités à la caractéristique, ce qui suffira le plus souvent; mais si l'on veut avoir plus de décimales, on fera la proportion comme ci-dessus (243), et réduisant le quatrième terme en décimales, on mettra celles-ci à la suite de celles qu'on a déjà trouvées.

Par exemple, si l'on demande à quel nombre appartient le logarithme 0,5432725; comme ce logarithme tombe entre ceux de 3 et de 4, et que le nombre auquel il appartient, est par conséquent beaucoup au-dessous de 1500, je cherche ce logarithme avec trois unités de plus à sa caractéristique; c'est-à-dire, que je cherche 3,5432725; je trouve qu'il tombe entre les logarithmes de 3493 et 3494, d'où je conclus que le nombre cherché est 3,493, à moins d'un millième près. Mais si cette approximation ne suffit pas, je prendrai la différence entre mon logarithme et celui de 3493, c'est-à-dire, 739; je prendrai pareillement la différence 1243 entre les logarithmes de 3494 et 3493, et je chercherai, en raisonnant comme ci-dessus (243), le quatrième terme d'une proportion qui commencerait par ces trois-ci :

$$1243 : 1 :: 739 :$$

Ce quatrième terme évalué en décimales, est 0,594; donc le nombre cherché est 3,493594.

Au reste, cette seconde approximation est bornée, parce que les logarithmes des tables n'étant exacts qu'à environ une demi-unité décimale du septième ordre près, les différences sont affectées de ce léger défaut; mais on peut toujours pousser l'approximation avec confiance, jusqu'à trois décimales : au surplus il est rare qu'on ait besoin d'aller jusques-là; mais la remarque que nous faisons, doit diriger aussi dans l'usage que nous avons fait ci-dessus (239 et 243), de la même proportion.

246. Si l'on veut avoir la fraction à laquelle répond un logarithme négatif proposé, on retranchera ce logarithme de 1, ou 2, ou 3, ou 4, etc. unités, selon l'étendue des tables; et après avoir trouvé le nombre qui répond au logarithme res-

Supposons, pour second exemple, qu'il soit question de multiplier $\frac{675}{527}$ par $\frac{952}{377}$; il faudrait (106) multiplier 675, par 952, et 527, par 377; puis diviser le premier produit par le second. Par logarithme, on opérera ainsi.....

Log. 675.....	2,829304
Log. 952.....	2,978637
Complément arithmét. du log de 527.	7,278189
Complément arithmét. du log. de 377.	7,423659
Somme.....	20,509789

Le logarithme du produit est donc 0,509789, qui, cherché avec trois unités de plus à la caractéristique, répond à 3,234.

On peut faire usage du complément arithmétique, pour mettre les logarithmes des fractions sous la même forme que ceux des nombres entiers, et les employer de même dans le calcul; par là on évitera la distinction des logarithmes négatifs et des logarithmes positifs. Il suffira de se souvenir que la caractéristique du logarithme des fractions, proprement dites, est trop forte de 10 unités.

Par exemple, pour avoir le logarithme de $\frac{3}{4}$ qui n'est (96) autre chose que 3 divisé par 4; au lieu de retrancher le logarithme de 4 de celui de 3, c'est-à-dire de retrancher le logarithme de 3 de celui de 4, et de donner au reste le signe —, (235); au logarithme de 3, j'ajoute le complément arithmétique du logarithme de 4;

Log. 3.....	0,477121
Complément arith. du log. 4.....	9,397940
Somme.....	9,875061

Cette somme est le logarithme de $\frac{3}{4}$, dont la caractéristique est trop forte de 10 unités. Or, il n'est pas nécessaire de faire actuellement la diminution; on peut la rejeter à la fin des opérations dans lesquelles on emploiera ce logarithme. La même règle s'applique aux fractions décimales; ainsi, pour avoir le

logarithme de 0,575, qui n'est autre chose que $\frac{575}{1000}$, au lo
rithme de 575, j'ajouterais le complément arithmétique d
logarithme de 1000. En employant ainsi les complémens arit
métiques, au lieu des logarithmes négatifs des fractions, il n'e
est pas plus difficile de trouver, dans les tables, les valeurs, e
décimales, de ces mêmes fractions. Dès que je saurai qu'u
logarithme proposé est, ou renferme un ou plusieurs compl
mens arithmétiques, je sais que sa caractéristique est trop fo
d'autant de dixaines qu'il y entre de complémens arithmétiqu
ainsi, si elle passe ce nombre de dixaines, il sera facile de
diminuer et de trouver le nombre auquel appartient ce lo
rithme, et qui sera un nombre entier, ou un nombre en
joint à une fraction. Mais si la caractéristique est au-dessou
nombre de dixaines qu'elle est censée renfermer de trop,
appartient certainement à une fraction que je trouverai de
manière : je chercherai, par ce qui a été dit, à quel no
répond le logarithme proposé ; et lorsque je l'aurai trouvé,
séparerai, par une virgule, autant de dixaines de chiffres
droite, qu'il y aura de dixaines de trop dans la caractérist
Par exemple, si l'on me donnait 8,732235 pour logarithm
sultant d'une opération dans laquelle il est entré un complé
arithmétique, je vois, puisque sa caractéristique est au-de
d'une dixaine, qu'il appartient à une fraction. Je cherch
bord (242) à quel nombre répond 8,732235, considéré co
logarithme de nombre entier; je trouve qu'il répond à 53980
séparant 10 chiffres, j'ai 0,0539802500 pour valeur très-a
chée de la fraction qui répond au logarithme proposé.

Mais comme il est très-rarement nécessaire d'avoir ces
tions à un tel degré de précision, on abrégera en diminuan
de suite la caractéristique du logarithme proposé, autan
est nécessaire pour la faire tomber dans celle des tabl
prenant seulement le nombre correspondant, on sépare
tant de chiffres de moins que ne le prescrit la règle précé
autant de moins, dis-je, qu'on aura ôté d'unités à la ca

ristique. Ainsi, dans le cas présent, je diminuerais la caractéristique de 5 unités, et ayant trouvé que le nombre correspondant est 5398, j'en séparerais seulement 5 chiffres, et j'aurais 0,05398.

Dans les élévations aux puissances, il faudra observer qu'en multipliant (229) le logarithme par le nombre qui marque le degré de la puissance, il se trouvera qu'on multipliera aussi ce dont la caractéristique se trouvera être trop forte. Ainsi, en élevant au cube, par exemple, s'il entre un complément arithmétique dans le logarithme proposé; c'est-à-dire si la caractéristique est trop forte de 10 unités, celle du logarithme du cube sera trop forte de 30 unités, et ainsi des autres. Il sera donc facile de la ramener à sa juste valeur.

Dans les extractions des racines, pour éviter toute méprise, lorsqu'il entrera des complémens arithmétiques dans les logarithmes dont on fera usage, on aura soin d'ajouter ou d'ôter à la caractéristique autant de dixaines qu'il est nécessaire pour que ce dont elle sera trop forte, soit précisément d'autant de dixaines qu'il y a d'unités dans le nombre qui marque le degré de la racine; et ayant, conformément à la règle ordinaire, divisé par le nombre qui marque le degré de la racine, la caractéristique sera trop forte, précisément de dix unités. Par exemple, si l'on demande la racine cubique de $\frac{276}{547}$, au logarithme de 276, j'ajoute le complément arithmétique de celui de 547.

Log. 276.....	2,440909
Compl. arith. du log. de 547.....	7,262013
Somme.....	9,702922
à la caractéristique de laquelle j'ajoute..	20

afin qu'elle devienne trop forte de 3 dixaines, et j'ai 29,702922 dont le tiers 9,900974 est le logarithme de la racine cubique demandée, mais avec dix unités de trop à la caractéristique; con-

formément à ce qui a été observé ci-dessus, je trouve que cette racine cubique est 0,7961 à moins d'un millième près.

L'usage des complémens arithmétiques est principalement utile dans les calculs de la Trigonométrie, et par conséquent dans plusieurs des opérations du Pilotage que l'on veut faire avec une certaine exactitude.

FIN DE L'ARITHMÉTIQUE DE BEZOUT.

De l'Imprimerie de Mme Ve COURCIER, rue du Jardinet, n° 12, et quai des Augustins, n° 57.

ant, on en séparera sur la droite, par une virgule, autant de chiffres qu'il y aura eu d'unités dans le nombre dont on aura retranché le logarithme.

Par exemple, si l'on demande à quelle fraction appartient —1,532732, je retranche 1,532732 de 4, et il me reste 2,467268, qui, dans la table, se trouve entre les logarithmes de 293 et de 294; j'en conclus que la fraction cherchée est entre 0,0294 et 0,0293; c'est-à-dire, qu'elle est 0,0293, à moins d'un dix-millième près. En effet, retrancher de 4, le logarithme proposé 1,532732, c'est (236) multiplier 10000 par la fraction laquelle appartient ce même logarithme proposé, ou (ce qui est la même chose), c'est multiplier cette fraction par 10000; donc le nombre qu'on trouve est 10000 fois plus grand; il faut donc le compter pour des dix-millièmes.

Tout ce que nous venons de dire, trouvera abondamment des applications par la suite. Bornons-nous, quant à présent, à donner une idée, par quelques exemples, de l'avantage que les logarithmes procurent pour la facilité et la promptitude des calculs.

EXEMPLE I.

On demande le quotient de 17954 divisé par 13836, approché jusqu'à moins d'un millième près.

Logarithme de 17954.....	4,254161
Logarithme de 13836.....	4,108430
Reste.....	0,145731

Ce reste, cherché dans les tables, avec une caractéristique plus forte de quatre unités, répond à 13987; donc (238) le quotient cherché est 1,3987.

EXEMPLE II.

On demande la racine cubique de 53, à moins d'un millième près.

Le logarithme de 53 est.....	1,724276
Son tiers (330) est.....	0,574759

Ce dernier, cherché dans les tables avec une caractéristique

plus forte de trois unités, répond à 3756; donc (238) la racine cherchée est 3,756.

Pour juger de l'avantage des logarithmes, on n'a qu'à chercher cette racine par la méthode donnée (156). Il ne faut pas pour cela regarder cette dernière comme inutile; car elle s'étend à une infinité de nombres auxquels les logarithmes n'atteindraient pas, par rapport aux bornes des tables.

EXEMPLE III.

Veut-on avoir, à moins d'un centième près, la racine cinquième du cube de 5736?

On triplera le logarithme 3,758609, de 5736; et on aura 11,275827, pour logarithme du cube 5736. Prenant le cinquième de ce dernier logarithme, on a 2,255165, pour logarithme de la racine cinquième du cube de 5736. Ce logarithme cherché dans les tables, avec une caractéristique plus forte de deux unités, pour avoir des centièmes, répond entre les nombres 17995 et 17996; la racine cherchée est donc 179,95 à moins d'un centième près.

EXEMPLE IV.

Qu'il soit question de trouver quatre moyens proportionnels géométriques, entre $2\frac{2}{3}$, et $5\frac{3}{4}$?

Il faudrait (215) pour avoir la raison qui doit régner dans la progression, diviser $5\frac{3}{4}$ par $2\frac{2}{3}$; et extraire la racine cinquième du quotient.

Par logarithmes, cette opération est très-simple. Je détermine, par les tables, le logarithme de $5\frac{3}{4}$ ou $\frac{23}{4}$; c'est 0,759668. Je détermine pareillement le logarithme de $2\frac{2}{3}$; c'est 0,425969.

Je retranche donc (231) ce logarithme du premier, et j'ai 0,333699; prenant donc (230) le cinquième de ce dernier, j'ai

0,066740 pour le logarithme de la raison cherchée. Ce logarithme, cherché dans les tables, avec une caractéristique plus forte de 4 unités, pour avoir 4 décimales, répond à 11661, à moins d'une unité près; donc la raison est 1,1661, à moins d'un dix millième près. Il ne s'agit donc plus, pour avoir les moyens proportionnels, que de multiplier le premier terme $2\frac{2}{3}$ par 1,1661, puis le produit par 1,1661, et ainsi de suite.

Mais ces opérations peuvent être faites beaucoup plus promptement, à l'aide des logarithmes, en ajoutant successivement au logarithme 0,425969 du premier terme $2\frac{2}{3}$, le logarithme 0,066740 de la raison, son double, et son triple, son quadruple, ensorte qu'on aura 0,492709; 0,559449; 0,626189; 0,692929 pour les logarithmes des quatre moyens proportionnels demandés, et si l'on cherche ces logarithmes dans les tables, avec trois unités de plus à la caractéristique, on trouve que ces quatre moyens proportionnels sont 3,109; 3,626; 4,228; 4,931.

REMARQUE.

Lorsque dans une opération où l'on fait usage des logarithmes, il s'en trouve quelques-uns que l'on doit retrancher, on peut simplifier l'opération par l'observation suivante.

Lorsqu'on a à retrancher un nombre quelconque, d'un autre qui est l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans le premier, l'opération se réduit à écrire la différence entre 9 et chacun des chiffres du nombre proposé, à l'exception du dernier, pour lequel on écrit la différence entre 10 et ce chiffre. Par exemple, si j'ai 526927 à retrancher de 1000000, je retranche successivement les chiffres 5, 2, 6, 9, 2, de 9; et le dernier chiffre 7, je le retranche de 10, et j'ai 473073 pour reste.

Ce reste est ce qu'on appelle le *complément arithmétique* du nombre proposé.

La soustraction faite de cette manière, étant trop simple

pour pouvoir être comptée pour une opération, il s'ensuit que lorsqu'on aura à former un résultat de l'addition et de la soustraction de plusieurs nombres, on pourra toujours réduire l'opération à l'addition. Par exemple, s'il s'agissait d'ajouter les deux nombres 672736,426452 et de retrancher de leur somme les deux nombres 432752,18675, ce qui exige deux additions et une soustraction, je substitue à cette opération la suivante.

	672736
	426452
Complément arithmét. de 432752...	567248
Complément arithmét. de 18675...	981325
Somme.....	2647761

c'est-à-dire, que j'ajoute ensemble les deux premiers nombres proposés, et les complémens arithmétiques des deux derniers; la somme est 2647761. Il faut en supprimer le premier chiffre 2; et les chiffres restans 647761 sont le résultat cherché.

La raison de cette opération est facile à sentir, en remarquant que si au lieu de retrancher 432752, comme on le proposait, j'ajoute son complément arithmétique, c'est-à-dire 1000000 moins 432452; je fais en même temps la soustraction proposée, et une augmentation de 1000000, c'est-à-dire d'une dixaine au premier chiffre du résultat; donc pour chaque complément arithmétique que j'ai introduit, j'aurai une dixaine de trop à l'égard du premier chiffre du résultat.

L'application de ceci aux logarithmes, est évidente.

Qu'il soit question, par exemple, de diviser 3760, par 79. Il faudrait retrancher le logarithme 79, de celui de 3760. Au lieu de cette opération, j'écris

Log. 3760.....	3,575188
Complément arith. de log. de 79.....	8,102373
Somme.....	11,677561

Ainsi 1,677561 est le logarithme du quotient, et répond à 47,59 à moins d'un centième près.

NOTES

JR L'ARITHMÉTIQUE;

PAR A. A. L. REYNAUD,

lier de la Légion-d'Honneur, Examinateur des Candidats
de l'École Royale Polytechnique, etc.

HUITIÈME ÉDITION.

PARIS,

Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Sciences,
e du Jardinet, n° 12, et quai des Augustins, n° 57.

1816.

AVIS RELATIF AUX NOTES.

Les Ouvrages de *Bezout* sont recommandables par leur clarté. Si l'on y trouve des théories peu rigoureuses, on ne doit pas en faire un reproche à l'auteur, qui voulait se mettre à la portée des jeunes gens. En laissant d'abord apercevoir à l'Elève, toute l'immensité de la carrière à parcourir et les obstacles qu'il doit y rencontrer, on le rebute dès le principe. Pour éviter cet inconvénient, *Bezout* a présenté les Mathématiques élémentaires, sous un point de vue clair et facile, en éludant certaines difficultés, qui n'étant pas à la portée des commençans, doivent être réservées pour des parties plus avancées. Le succès de ces Ouvrages, constate leur mérite et leur utilité.

Des théories très-importantes ayant été perfectionnées, depuis la mort de *Bezout*, j'ai cherché à completter ses Ouvrages, dans des Notes, sur l'*Arithmétique*, sur l'*Algèbre*, sur la *Géométrie* et sur l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie*. Les *Notes* sur le *Calcul différentiel et intégral* et sur la *Mécanique*, paraîtront incessamment. *Ces Notes sont particulièrement destinées aux Candidats et aux Elèves de l'Ecole Polytechnique.*

Les *Notes sur l'Arithmétique*, sont divisées en quatre Parties. La première Partie renferme, la numération et le calcul des nombres entiers, les fractions, les décimales, les mesures anciennes et nouvelles. La seconde Partie est une *introduction à l'Algèbre*. Elle complette l'Arithmétique et prépare à l'étude de l'Algèbre, en montrant comment on peut résoudre les problèmes les plus compliqués, au moyen des seules combinaisons des quatre règles et sans le secours des proportions. Dans la troisième Partie, on considère l'Arithmétique sous le point de vue le plus général, la *base* étant un nombre entier positif. Cette Partie, qui exige la connaissance de l'Algèbre, renferme des théories nouvelles; elle est particulièrement consacrée, aux Elèves qui se destinent à l'Ecole Polytechnique. Ces trois premières Parties, forment un Traité d'Arithmétique. La quatrième Partie est destinée à completter la Théorie des Logarithmes de *Bezout*, en indiquant l'usage des Tables de Logarithmes.

Les Notes sont précédées d'une *Table* très-détaillée, qui fait apercevoir l'ensemble et l'enchaînement de toutes les parties de l'Arithmétique. Cette Table sera fort utile aux Elèves qui voudront repasser l'Arithmétique, pour se préparer à subir des examens.

Dans les trois premières Parties, les numéros mis entre parenthèses, indiquent des renvois à des articles des Notes. Dans la quatrième Partie, ces numéros renvoient au texte de *Bezout*. On pourra passer, sans inconvénient, les articles dont les numéros sont précédés d'une *étoile* *.

TABLE RAISONNÉE

DES NOTES.

PREMIÈRE PARTIE.

NOMBRES ABSTRAITS.

Nombres entiers.

L'ARITHMÉTIQUE a pour but d'effectuer diverses opérations sur les *nombres*. Le *nombre* est l'assemblage de plusieurs *unités* de même nature. L'*unité* est un terme de comparaison entre plusieurs *quantités* de même espèce. On entend par *quantité*, tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution. La suite des nombres est illimitée. Nos 1....3.

La NUMÉRATION offre trois parties : la *formation des nombres*, les *noms des nombres* et leur *écriture en chiffres*. Pour écrire tous les nombres, avec dix chiffres, on est convenu qu'en avançant successivement d'un rang vers la gauche d'un nombre, les chiffres exprimeraient des unités de dix en dix fois plus grandes. Nos 4....8.

Règles générales pour *écrire en chiffres un nombre énoncé et* pour *énoncer un nombre écrit* en chiffres. Nos 9....11.

Un nombre est *abstrait*, quand on fait abstraction de la nature de ses unités. Un nombre est *concret*, lorsqu'on désigne l'espèce de ses unités. Dans toutes les questions de l'Arithmétique, la nature des unités du résultat étant connue d'avance, il suffit d'en déterminer le nombre. *Tout se réduit donc à opérer sur des nombres abstraits.* No 12.

*Le but de l'*ADDITION *est d'obtenir un nombre qui contienne à lui seul toutes les unités de plusieurs autres nombres.* On commence l'addition par la droite, et pour obtenir le résultat, il suffit d'ajouter successivement, un nombre d'un seul chiffre à un nombre connu ; ce qui exige beaucoup d'habitude. Nos 13 et 14.

Dans la SOUSTRACTION, *on se propose, connaissant la somme de deux nombres et l'un de ces nombres, de trouver l'autre nombre.* La différence entre deux nombres, ajoutée au plus petit de ces deux nombres, donne le plus grand. On doit commencer par la droite. Le calcul se réduit à

retrancher des nombres d'un seul chiffre, des nombres moindres que 19. La soustraction est donc plus facile que l'addition. N°s 15 et 16.

Le but de la MULTIPLICATION *est de prendre un nombre, nommé multiplicande, autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre nombre, nommé multiplicateur; le résultat se nomme produit. Le multiplicateur est essentiellement abstrait.* Le produit est de même nature que le multiplicande. Un produit ne change pas de valeur, dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications. Pour être en état d'effectuer les multiplications les plus composées, il suffit de connaître tous les produits deux à deux des nombres d'un seul chiffre. N°s 17....26.

Le but de la DIVISION *est, connaissant un produit, nommé dividende, et l'un de ses facteurs, nommé diviseur, de trouver l'autre facteur, appelé quotient.* La démonstration de la règle à suivre pour effectuer la division, repose sur les principes suivans : 1°. quand le diviseur est abstrait, le quotient est de la nature du dividende; 2°. le produit des unités, dixaines, centaines, etc., du diviseur, par le quotient, doit donner les unités, dixaines, centaines, etc., du dividende. Il faut commencer la division par la gauche. Cette opération se réduit à calculer des quotiens partiels d'un seul chiffre. Le dividende est égal au produit du diviseur par les unités du quotient, plus le dernier reste. N°s 27....31.

Preuves des quatre règles. Le but de la *preuve* est de vérifier l'exactitude du résultat, par un calcul qui diffère du procédé qui a conduit à ce résultat. On risquerait en recommençant le même calcul, de répéter la même erreur, ce qui empêcherait de l'apercevoir. N° 32.

Fractions.

Quand une division ne peut pas s'effectuer exactement, le quotient se compose, d'un nombre entier, et d'une *fraction* qui exprime la valeur du dernier reste divisé par le diviseur. La valeur d'une fraction s'obtient également, ou en divisant le numérateur par le dénominateur, ou en divisant l'unité en un nombre de parties égales marqué par le dénominateur et prenant autant de ces parties qu'il y a d'unités dans le numérateur. N°s 33....37.

Les fractions de même dénominateur, étant composées de parties égales, et le nombre de ces parties étant indiqué par chaque numérateur, il en résulte que *pour ajouter ou pour soustraire des fractions de même dénominateur, il suffit de former la somme ou la différence des numérateurs et d'affecter le résultat du dénominateur commun.* Quand les *fractions* n'ont pas le même dénominateur, cette règle ne peut pas s'appliquer ; il faut donc chercher à les réduire au même dénominateur, sans changer leurs valeurs. Cette réduction est fondée sur ce principe, qu'*une fraction ne change pas de valeur, quand on multiplie ou quand on divise ses deux*

termes par un même nombre. Pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur, il suffit de multiplier successivement les deux termes de chacune, par le produit des dénominateurs différens de toutes les autres. Nos 38....40.

Pour multiplier plusieurs fractions entr'elles, on divise le produit des numérateurs, par celui des dénominateurs. Pour diviser par une fraction, il suffit de multiplier le dividende, par la fraction diviseur renversée. On obtient la valeur d'une *fraction de fraction*, en formant le produit de toutes les fractions simples qui entrent dans son énoncé. Nos 41....46.

Lorsqu'on veut opérer sur des fractions, jointes à des nombres entiers, on réduit les entiers en fractions, en donnant l'unité pour dénominateur à chaque entier. La preuve des quatre règles, s'effectue comme pour les nombres entiers, en observant que dans la preuve de l'addition, la première colonne à droite devient celle des fractions. Nos 47....51.

On dit qu'une fraction est *irréductible*, ou réduite à sa plus simple expression, quand elle ne peut être exprimée exactement par des fractions ayant des termes moindres. Pour réduire une fraction à sa plus simple expression, il suffit de diviser ses deux termes par leur *plus grand commun diviseur*. La recherche du plus grand commun diviseur entre deux nombres, repose sur les principes suivans : 1°. *Quand plusieurs nombres ont un diviseur commun, leur somme a le même diviseur*; 2°. *le diviseur d'un nombre, en divise exactement les multiples*; 3°. *Lorsqu'une somme est composée de deux parties, tout nombre qui divise la somme et l'une de ses parties, divise nécessairement l'autre partie*; 4°. *le plus grand commun diviseur entre deux nombres est le même que le plus grand commun diviseur entre le plus petit de ces deux nombres et le reste de la division du plus grand nombre par le plus petit.* On en déduit que, *pour trouver le plus grand commun diviseur entre deux nombres, il suffit de diviser successivement, le plus grand nombre par le plus petit, ce dernier nombre par le premier reste, le premier reste par le second, et ainsi de suite. Le reste qui divise exactement le reste précédent, est le plus grand commun diviseur demandé.* Le plus grand commun diviseur, divise exactement tous les restes. On dit qu'un *nombre* est *premier*, lorsqu'il n'est exactement divisible que par lui-même et par l'unité. Des *nombres* sont dits *premiers entr'eux*, lorsqu'ils n'ont aucuns facteurs communs; leur plus grand commun diviseur est donc égal à l'unité. Nos 52....59.

Le nombre de divisions à effectuer, pour obtenir le plus grand commun diviseur entre deux nombres, ne peut jamais excéder le plus petit de ces deux nombres. Le plus grand commun diviseur entre plusieurs nombres, étant le produit de tous les facteurs communs à ces nombres, on en déduit que, *pour trouver le plus grand commun diviseur entre plusieurs nombres,*

il suffit de chercher successivement le plus grand commun diviseur entre le premier nombre et le deuxième, entre ce dernier commun diviseur et le troisième nombre, et ainsi de suite jusqu'au dernier des nombres proposés. Le plus grand commun diviseur obtenu dans la dernière opération, est celui des nombres proposés. Nos 60 et 61.

Pour multiplier ou pour diviser un nombre, par un produit, il suffit de multiplier ou de diviser successivement ce nombre, par les facteurs du produit; et réciproquement. Nos 26 et 62.

Théorie des Décimales.

La complication du calcul des fractions ordinaires, comparée à la simplicité du calcul des nombres entiers, a conduit aux *décimales. Le système des décimales, n'est qu'une extension du système adopté pour les nombres entiers; on a conçu la série, des unités des différens ordres, prolongée indéfiniment de part et d'autre de l'unité principale.* Nos 63 et 64.

Tout nombre décimal est équivalent à une fraction ordinaire, dont le numérateur est le nombre decimal, abstraction faite de la virgule, et dont le dénominateur est l'unité suivie d'autant de zéros à droite, qu'il y avait de décimales. Réciproquement, *pour convertir en décimales une fraction ordinaire, dont le dénominateur est l'unité suivie de plusieurs zéros, on écrit le numérateur et l'on sépare autant de décimales sur sa droite, qu'il y avait de zéros dans le dénominateur.* On en déduit des règles générales pour *écrire un nombre décimal énoncé* et pour *énoncer un nombre décimal écrit.* Nos 65....69.

Le calcul des nombres décimaux, doit être aussi simple que celui des nombres entiers, car les unités de ces nombres sont soumises à la même loi. Et en effet; 1°. l'*addition* et la *soustraction*, des nombres décimaux s'exécutent comme pour les nombres entiers; 2°. pour *multiplier* ou pour *diviser* un nombre décimal, par l'unité suivie de plusieurs zéros, il suffit d'avancer la virgule d'autant de rangs, vers la droite du multiplicande ou vers la gauche du dividende, qu'il y a de zéros à la suite de l'unité 3°. pour multiplier entr'eux plusieurs nombres décimaux, on effectue la multiplication comme s'il n'y avait pas de virgule et l'on sépare, sur la droite du produit, autant de décimales qu'il y en a dans tous les facteurs réunis 4°. pour diviser deux nombres décimaux l'un par l'autre, on met d'abord assez de zéros sur la droite du nombre qui contient le moins de décimales pour que le dividende et le diviseur contiennent le même nombre de décimales. On effectue ensuite la division, en faisant abstraction de la virgule. Le résultat exprime le quotient demandé. Nos 70....76.

Pour opérer sur des fractions ordinaires, combinées avec des nombres

entiers et décimaux, on transforme ces nombres en fractions ordinaires, et la question est réduite à opérer sur des fractions ordinaires. N° 77.

Pour réduire une fraction en décimales; on divise le numérateur par le dénominateur, en ayant soin, lorsqu'on a obtenu les unités du quotient, de mettre une virgule sur leur droite et de convertir les restes successifs, en dixièmes, en centièmes, etc. *Quand le dénominateur ne contient que les facteurs* 2 *et* 5, *la fraction se réduit exactement en décimales*, car en multipliant ses deux termes, un certain nombre de fois par 2 ou par 5, le dénominateur devient l'unité suivie de plusieurs zéros. Pour déterminer combien le quotient renfermera de chiffres, à droite de la virgule, on réduit d'abord la fraction à sa plus simple expression. Si α et β expriment combien de fois les facteurs 2 et 5, entrent dans le dénominateur de la fraction irréductible; le nombre des chiffres placés à droite de la virgule, est égal au plus grand des nombres, α, β. *Lorsque le dénominateur d'une fraction irréductible, contient d'autres facteurs que* 2 *et* 5, *la fraction ne peut pas se réduire exactement en décimales, le quotient est périodique. Toute fraction décimale périodique, moindre que l'unité, est exprimée par une fraction ordinaire, dont le numérateur est la période et dont le dénominateur est un nombre composé d'autant de* 9, *qu'il y a de chiffres dans la période.* On en déduit le moyen de convertir les fractions décimales périodiques *mixtes*, en fractions ordinaires. N°s 78....89.

Règles générales pour *approcher de la valeur d'un nombre décimal, en ne conservant qu'un certain nombre de décimales.* N°s 90....96.

NOMBRES CONCRETS.

Mesures anciennes.

Le calcul des nombres concrets incomplexes, n'offre aucune difficulté; il suffit d'opérer sur les nombres abstraits, qui expriment combien il y a d'unités dans les nombres donnés. Dans l'*addition* et dans la *soustraction*, les unités que l'on considère doivent être de même nature. Dans la *multiplication*, le multiplicateur est abstrait et le produit est de la nature du multiplicande. Dans la *division*, le dividende étant concret et le diviseur abstrait, le quotient est de même nature que le dividende; quand le dividende et le diviseur sont concrets, ils doivent être composés d'unités de même nature et le quotient est abstrait. N°s 97....100.

Les principes précédens suffisent pour le calcul des nombres complexes, parce qu'on peut toujours convertir ces nombres en fractions. On simplifie les calculs, en opérant directement sur les nombres proposés. N°s 101....113.

Nouvelles Mesures.

La complication des opérations de l'Arithmétique, sur les nombres complexes qui expriment les mesures anciennes, étant due au peu d'uniformité des subdivisions de chaque espèce d'unité concrète, on a divisé chaque unité concrète en parties de dix en dix fois plus petites. Ce qui a réduit le calcul des nouvelles mesures, à celui des nombres décimaux. Pour obtenir une unité de mesure qui pût se vérifier dans tous les temps, on a déterminé la distance du pôle à l'équateur, sur le méridien de Paris; la dix-millionième partie de cette longueur, a donné l'unité de longueur, nommée *mètre*. Le mètre vaut 3 pieds 11 lignes environ. Toutes les autres unités se déduisent du mètre. L'unité de *surface* est l'*are*; l'are vaut 100 mètres carrés. L'unité de *volume* est le *stère* ou mètre cube. Le *litre* contient un décimètre cube; le poids d'un centimètre cube d'eau distillée (*) a formé le *gramme*. Une pièce d'argent, pesant cinq grammes et alliée d'un dixième de cuivre, a composé le *franc*. 80 francs valent 81^{ff}. N°s 114....126.

SECONDE PARTIE.

INTRODUCTION A L'ALGÈBRE.

Problèmes.

Le *but de la seconde partie* est de faire voir que *les combinaisons des quatre règles, suffisent pour résoudre toutes les questions de l'Arithmétique.*

Règles de trois, simples et composées, directes et inverses. N°s 127....135.

Règles de compagnie ou de société. N°s 136 et 137.

Règles d'intérêt. On distingue deux sortes d'intérêts, l'*intérêt simple* et l'*intérêt composé*. L'intérêt *simple* est celui qui ne porte plus intérêt. L'intérêt est *composé*, quand l'intérêt de chaque année se joint au capital, pour porter intérêt pendant l'année suivante. Lorsque le taux de l'argent est connu, *les questions relatives à l'intérêt de l'argent, se réduisent à quatre*, car il s'agit toujours de trouver, ou ce que de l'argent comptant vaudra au bout d'un certain temps, ou réciproquement, ce qu'une somme payable dans un certain temps, vaut en argent comptant. N°s 138....155.

Problèmes sur les *annuités*. Dans ces problèmes, on se propose d'acquitter une dette, avec des paiemens effectués à certaines époques. *On ne peut comparer des sommes, payables à des époques différentes, qu'en évaluant toutes ces sommes à une même époque.* N°s 156 et 157.

(*) On a pris de l'eau filtrée, ramenée à son *maximum* de condensation.

Dans les problèmes relatifs aux *spéculations*, on se propose de *déterminer entre plusieurs spéculations, celle qui est la plus avantageuse.* Cela se réduit toujours à rapporter les gains et les pertes à une même époque; la différence entre la somme des gains et celle des pertes, de chaque spéculation, fait connaître quel en est l'avantage réel. N° 158.

Règles de change. Règles conjointes. N°s 159 et 160.

Rapports et Proportions.

Le *rapport* entre deux quantités, est le quotient de la division de la première quantité, par la seconde. Un rapport ne change donc pas, lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise ses deux termes par un même nombre. N°s 161....163.

L'égalité de deux rapports, forme une *proportion.* Dans toute proportion, le produit des *extrêmes* est égal au produit des *moyens.* Et réciproquement, lorsque cette égalité subsiste, la proportion est exacte. Il en résulte que trois termes d'une proportion, déterminent le quatrième. N°s 164....167.

Rapports directs et inverses. Un *rapport* est *direct*, quand le plus grand effet répond à la plus grande cause. Un *rapport* est *inverse*, quand le plus petit effet, répond à la plus grande cause. Une *règle de trois* est *directe* ou *inverse*, suivant que les *rapports* qu'on y considère, sont *directs* ou *inverses.* Exemples. N°s 168....171.

Partager un nombre, en parties proportionnelles à des nombres donnés, N°s 172....175.

Exemple relatif aux rapports directs et inverses. N° 176.

Problèmes amusans.

Problème sur les dîners en *pique-nique.* N° 177.

Questions relatives aux *fluides.* N°s 178 et 179.

Problème relatif à un courtier. N° 180.

Règle testamentaire. N° 181.

Connaissant une partie déterminée d'un nombre inconnu, trouver ce nombre? N°s 182 et 183.

Problèmes relatifs à des *couriers* et au mouvement des aiguilles d'une montre. N°s 184....188.

Règles de fausse position et de double fausse position. N°s 189....195.

Problème des Muses et des Grâces. N° 196.

Mesurer quatre litres de vin, avec trois vases qui contiennent, 3, 5 et 8 litres. N° 197.

Questions relatives à des *joueurs*. N°s 198 et 199.

Deviner la somme de plusieurs nombres. N° 200.

Problème sur les *jeux de hasard*. N° 201.

Des personnes prennent des bijoux. Il s'agit de découvrir, quel est l'objet qui a été choisi par chacune d'elles. N°s 202 et 203.

TROISIÈME PARTIE.

Le but de la *troisième partie* est de généraliser tout ce qu'on a vu dans la première partie, en considérant les propriétés des nombres, lorsque la base est un nombre entier b. Dans ce système, il y a b chiffres; les $(b-1)$ chiffres significatifs, expriment les nombres, $1, 2, 3, \ldots, (b-1)$; le zéro, n'a aucune valeur par lui-même; il sert à conserver aux chiffres significatifs, la place qu'ils doivent occuper. Pour écrire tous les nombres, il suffit de convenir qu'en avançant successivement d'un rang vers la gauche d'un nombre, les chiffres expriment des unités de b en b fois plus grandes. La numération et le calcul des nombres écrits dans le système dont la base est b, s'en déduisent avec la plus grande facilité. N°s 204....214.

Le produit de plusieurs facteurs, commensurables ou incommensurables, ne change pas, dans quelqu'ordre qu'on effectue les multiplications. N°s 215....221.

Propriétés relatives, aux produits de plusieurs nombres, aux *puissances* et aux *racines*. N°s 222....234.

Le reste d'une division ne change pas, quand le dividende augmente ou diminue d'un multiple du diviseur. N° 235.

Connaissant un nombre entier N, *dans le système dont la base est* b; *on peut toujours déterminer le reste de la division de* N, *par un diviseur quelconque* d, *sans effectuer la division.* N°s 236....241.

Recherche des *diviseurs d'un nombre*. Propriétés de ces diviseurs. N°s 242....250.

Lorsqu'une fraction est égale à une fraction irréductible; les deux termes de la première fraction, sont respectivement égaux à ceux de la seconde, multipliés par un même nombre entier. N° 251.

Les seules opérations qui n'altèrent pas la valeur d'une fraction, sont donc la multiplication et la division de ses deux termes, par un même nombre. N° 252.

Une fraction est irréductible, quand ses deux termes n'ont aucun facteur commun. N° 253.

Le produit $\alpha\beta$ étant divisible par γ, et γ n'ayant aucun facteur commun avec β, γ divise nécessairement α. N° 254.

Lorsqu'un nombre premier α, divise β^m, on peut en conclure que α divise β. N° 255.

Quand la fraction $\frac{b}{a}$ est irréductible, la fraction $\frac{b^m}{a^n}$ est également irréductible. N° 256.

Toutes les puissances d'une fraction irréductible, sont donc des fractions irréductibles. N° 257.

Lorsque α et β sont des nombres entiers, premiers entr'eux, les divisions des multiples, α, 2α, 3α, ..., $(\beta-1)\alpha$, $\beta\alpha$, par β, donnent nécessairement, 1, 2, 3, ..., $\beta-1$, 0, pour *restes*. Ces *restes* peuvent se présenter dans un autre ordre. N° 258.

Lorsqu'on avance la virgule de n rangs, vers la droite ou vers la gauche d'un nombre écrit dans le système dont la base est b, on multiplie ou l'on divise ce nombre par b^n. N°s 259 et 260.

Quand le chiffre des unités d'un nombre est suivi de n chiffres sur la droite ; ce nombre est exprimé par une fraction ordinaire, dont le numérateur est le nombre donné, dans lequel on fait abstraction de la virgule, et dont le dénominateur est l'unité suivie de n zéros, ou b^n. N° 261.

Réciproquement, lorsque le dénominateur d'une fraction, est l'unité suivie de n zéros vers la droite ou b^n, on peut mettre cette fraction sous la forme d'un nombre entier, il suffit pour cela d'écrire le numérateur et de placer la virgule sur la gauche des n premiers chiffres à droite. N° 262.

Quand le dénominateur d'une fraction n'est pas l'unité suivie de plusieurs zéros sur la droite, pour mettre cette fraction sous la forme d'un nombre entier ; divisez le numérateur par le dénominateur ; parvenu au chiffre des unités du quotient, mettez une virgule sur sa droite et convertissez les restes successifs, en unités de b en b fois plus petites, ce qui revient à multiplier chaque reste par la base b. Divisez ces dividendes, par le dénominateur; les quotiens successifs, seront les chiffres qui doivent suivre la virgule, dans le quotient total. N° 263.

Quand le dénominateur d'une fraction, ne renferme que les facteurs premiers de la base, on peut toujours multiplier les deux termes par un nombre tel, que le dénominateur de la fraction qui en résulte, soit l'unité suivie de plusieurs zéros vers la droite. De sorte que cette fraction peut être mise sous la forme d'un nombre entier. La règle du n° 263, détermine le quotient. N° 265.

Quand le dénominateur, d'une fraction irréductible $\frac{B}{A}$, ne contient que les facteurs premiers de la base b ; pour déterminer combien le quotient de la division, de B par A, contiendra de chiffres sur la droite de la virgule ; dé-

composez b et A en leurs facteurs premiers, p, q, etc.; vous trouverez, $b = p^{\alpha} q^{\zeta}$ etc., $A = p^{m} q^{n}$ etc.; soit $\frac{\gamma}{\delta}$ la plus grande des fractions, $\frac{m}{\alpha}$, $\frac{n}{\zeta}$, etc; divisez γ par δ; vous obtiendrez un quotient entier Q et un reste R; alors, selon que R sera nul ou ne sera pas nul, le nombre des chiffres placés à droite de la virgule, sera Q, ou Q + 1. N° 266.

Lorsque le dénominateur d'une fraction irréductible $\frac{B}{A}$, contient d'autres facteurs premiers que ceux de la base, cette fraction ne peut être transformée en une autre, dont le dénominateur serait l'unité suivie de plusieurs zéros vers la droite. De sorte que la fraction $\frac{B}{A}$ ne peut pas être mise sous la forme d'un nombre entier. La division de B par A, conduit à un quotient qui se prolonge à l'infini. N° 267.

Quand le dénominateur d'une fraction irréductible $\frac{B}{A}$, ne contient aucuns des facteurs premiers de la base b, la division de B par A, donne un quotient périodique, dont la période commence au premier chiffre à droite de la virgule. N° 268.

Quand une fraction irréductible $\frac{B}{A}$, est telle que A ne renferme aucun des facteurs premiers de la base, et que le premier chiffre à droite de B n'est pas zéro, la division de B par A, donne un quotient périodique, dont la période commence au premier chiffre à droite de la virgule, et en avançant la virgule, de α rangs à gauche, le résultat renferme toujours α chiffres entre la virgule et la première période. N° 269.

Lorsque le dénominateur d'une fraction irréductible $\frac{M}{N}$, contient des facteurs premiers de la base b, combinés avec d'autres facteurs premiers, le quotient est indéfini et périodique, mais la période ne commence pas au premier chiffre à droite de la virgule. Pour découvrir combien il y aura de chiffres, entre la virgule et la première période; décomposez b et N en leurs facteurs premiers, p, q, etc.; vous trouverez, $b = p^{\alpha} q^{\zeta}$ etc.; $N = A\, p^{m} q^{n}$ etc.; A ne contenant aucun des facteurs premiers de b. Soit $\frac{\gamma}{\delta}$, la plus grande des fractions, $\frac{m}{\alpha}$, $\frac{n}{\zeta}$, etc.; la division de γ par δ, donnera un quotient entier Q et un *reste* R. Alors, selon que R sera nul ou ne sera pas nul, le nombre des chiffres placés entre la virgule et la première période, sera Q ou Q + 1. N° 270.

Tout quotient, composé d'un nombre fini de chiffres à droite de la virgule, ou d'une infinité de périodes, est égal à une fraction ordinaire. N°s 261 et 271.

La *base* étant b; pour convertir un quotient périodique, en fraction ordinaire; transportez successivement la virgule à droite et à gauche de la première période; la différence entre ces deux derniers nombres, sera le numérateur de la fraction demandée. Pour former son dénominateur, il suffit de prendre un nombre composé d'autant de chiffres égaux à $b - 1$, qu'il y a de chiffres dans la période, et de mettre autant de zéros sur la droite de ce nombre, qu'il y a de chiffres entre la virgule et la première période. Il en résulte que, tout quotient périodique, moindre que l'unité, dont la période commence au premier chiffre à droite de la virgule, est égal à une fraction ordinaire, qui a pour numérateur la période et pour dénominateur un nombre composé d'autant de chiffres égaux à $b - 1$, qu'il y a de chiffres dans la période. N°s 272 et 273.

Fractions continues.

La difficulté de prendre une idée exacte des grandeurs des fractions irréductibles, dont les termes sont un peu grands, a conduit à la recherche des fractions plus simples, qui approchent de la fraction proposée. Ces fractions plus simples, dépendent des *fractions continues*. N° 274.

Pour *convertir une fraction irréductible* $\frac{B}{A}$, *en fraction continue;* opérez comme si vous cherchiez le plus grand commun diviseur, entre les deux termes B et A; vous obtiendrez des quotiens entiers, q, q', q'', etc, (q exprime le quotient entier de la division de B par A); le nombre de ces quotiens sera toujours moindre que $A + 1$. La valeur de $\frac{B}{A}$, en fraction continue, sera (1)... $q + \cfrac{1}{q' + \cfrac{1}{q'' + \text{etc.}}}$ N° 275.

Pour *convertir la fraction continue* (1), *en fraction ordinaire*, on réduit d'abord $q + \frac{1}{q'}$ en fraction ordinaire; ce qui donne $\frac{qq' + 1}{q'}$. On change dans cette dernière, q' en $q' + \frac{1}{q''}$; on multiplie les deux termes de la fraction qui en résulte, par q''; ce qui donne $\frac{(qq' + 1)q'' + q}{q'q'' + 1}$; cette dernière fraction est la valeur de $q + \cfrac{1}{q' + \cfrac{1}{q''}}$. Et ainsi de suite, jusqu'au dernier quotient. Les fractions, $\frac{q}{1}$, $q + \frac{1}{q'}$, etc., ont reçu le nom de *réduites*. N° 276.

La comparaison des réduites successives, avec la fraction continue totale (1),

conduit à cette règle générale : pour *transformer les réduites successives, en fractions ordinaires*, écrivez les quotiens, q', q'', q''', etc., par ordre et sur une même ligne horizontale. Calculez les deux premières réduites, $\frac{q}{1}$, $\frac{qq'+1}{q'}$; posez ces réduites sous q' et q''. Pour en déduire la troisième réduite, multipliez les deux termes de la seconde réduite, par le quotient q'', placé au-dessus; les produits, augmentés respectivement des deux termes de la première réduite, donneront le numérateur et le dénominateur de la troisième réduite. La quatrième réduite se déduira de même des deux précédentes, en prenant pour multiplicateur le quotient q'''; et ainsi de suite. Les termes des réduites, vont en augmentant. N°s 277....279.

Les réduites successives sont alternativement plus petites et plus grandes que la fraction continue totale, mais elles en approchent de plus en plus. Les réduites de rang impair, sont trop petites et vont en augmentant; celles de rang pair, sont trop grandes, elles vont en diminuant. N°s 280 et 281.

Les numérateurs des fractions qui expriment les différences entre les réduites consécutives, sont égaux à l'unité. Les deux termes de chaque réduite sont premiers entr'eux. N°s 282 et 283.

Lorsqu'on prend une réduite $\frac{c}{\alpha}$, au lieu de la fraction continue totale, l'erreur est moindre que $\frac{1}{\alpha^2}$. N° 284.

Toute fraction ordinaire, est exprimée par une fraction continue, qui est composée d'un nombre fini de quotiens; et réciproquement, toute fraction continue, composée d'un nombre fini de quotiens, est équivalente à une fraction ordinaire. Pour calculer les fractions irréductibles, qui approchent de la valeur d'une fraction irréductible $\frac{B}{A}$; on transforme $\frac{B}{A}$ en fraction continue; les réduites successives, sont les fractions demandées. N°s 285 et 286.

Lorsqu'une fraction continue se prolonge à l'infini, on ne peut pas l'évaluer exactement, mais il est toujours facile de trouver une réduite $\frac{c}{\alpha}$, qui diffère de cette fraction continue, d'une quantité moindre que la quantité donnée $\frac{b}{a}$; il suffit pour cela, de continuer les calculs, jusqu'à ce qu'on parvienne à une réduite $\frac{c}{\alpha}$, dont le dénominateur α soit plus grand que la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Exemples. N° 287.

La valeur d'une *fraction continue périodique*, est toujours exprimée par la racine réelle positive d'une équation du second degré. N°s 288 et 289.

QUATRIÈME PARTIE.

Disposition et usages des Tables de Logarithmes placées à la fin du volume.

Ces *tables* contiennent les logarithmes des nombres entiers, depuis un, jusqu'à dix mille. La *caractéristique* du log d'un *nombre* entier, renferme autant d'unités moins une, qu'il y a de chiffres dans ce *nombre*. N°s 290 et 291.

Règles générales, pour trouver les logarithmes de tous les nombres. N° 292.

Règles inverses, pour découvrir à quels nombres appartiennent des logarithmes donnés. N° 293.

Lorsqu'on fait usage des logarithmes, les erreurs étant d'autant moindres que les nombres sont plus grands, on doit ramener les logarithmes à la caractéristique 3, parce qu'elle répond aux plus grands nombres contenus dans les tables. On peut toujours compter sur l'exactitude des quatre premiers chiffres à gauche du résultat. N° 294.

Le logarithme d'une quantité, est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la *base* 10, pour obtenir cette quantité. N° 295.

Les *logarithmes* des nombres entiers, 2, 3, 4, 5, etc., compris entre 1, 10, 100, 1000, etc., sont *incommensurables*. N° 296.

Rapports approchés, des nouvelles mesures aux anciennes. Dimensions exactes de la terre. Rapport très-approché de la circonférence au diamètre. Surface du cercle. Surface et volume de la sphère. Nombre de degrés de l'arc dont la longueur est égale au rayon. Longueur du pendule à secondes. Durée de l'année solaire. Page 153.

Tables pour convertir, les anciennes mesures en mesures nouvelles, et réciproquement.

Tables des rapports qui existent, entre les mesures et les monnaies des différens pays. Ces tables donnent les solutions des différens problèmes relatifs aux *changes étrangers*.

Table des logarithmes des nombres entiers, depuis un, jusqu'à dix mille.

FIN DE LA TABLE DES NOTES.

NOTES

SUR L'ARITHMÉTIQUE;

PAR A. A. L. REYNAUD.

PREMIÈRE PARTIE.

1. LORSQU'ON réfléchit sur la nature des *quantités* (*), on sent qu'il serait impossible de prendre une idée exacte de leurs grandeurs, si l'on ne choisissait pas une certaine quantité connue, qui pût leur servir de terme de comparaison ; *il n'existe donc aucune grandeur absolue.* Cette quantité, qui sert de terme de comparaison entre plusieurs quantités de son espèce, se nomme *unité;* l'assemblage de plusieurs unités de même grandeur, compose le *nombre;* et la science qui a pour but d'enseigner à effectuer diverses opérations sur les nombres, se nomme *Arithmétique.*

2. *La suite des nombres est illimitée*, car quelque grand que soit un nombre, il suffit de lui ajouter l'unité, pour en obtenir un plus grand.

3. *Entre deux nombres entiers, qui ne diffèrent que de l'unité, il ne peut tomber aucun nombre entier.*

4. La *numération* offre trois parties : la formation des nombres, les noms des nombres et leur écriture en *chiffres.*

5. Pour *former les nombres*, on part de l'unité ; l'unité ajoutée à elle-même, donne un nombre; celui-ci augmenté d'un, compose un nouveau nombre ; et si l'on continue à ajouter l'unité à chaque nombre obtenu, on formera la suite des *nombres entiers.*

(*) On entend par *quantité*, tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution.

6. Les *noms* de ces premiers *nombres* sont, *un*, *deux*, *trois*, *quatre*, *cinq*, *six*, *sept*, *huit*, *neuf*. Ce dernier augmenté d'un, donne le nombre *dix;* la collection de dix unités, forme un nouvel ordre d'unités, nommé *dixaine;* et de même qu'on compte depuis une unité, ou un, jusqu'à neuf unités, ou neuf, on compte aussi depuis une dixaine, jusqu'à neuf dixaines; mais pour abréger, au lieu des mots composés, une dixaine, deux dixaines, ..., sept dixaines, huit dixaines, neuf dixaines, on dit : *dix*, *vingt*, ..., *soixante-dix*, *quatre-vingts*, *quatre-vingt-dix*. On peut substituer aux trois derniers noms, les mots *septante*, *octante*, *nonante*, qui désignent mieux, *sept*, *huit*, *neuf*, *dixaines*. Pour exprimer les neuf nombres compris entre deux dixaines consécutives, on énonce successivement les dixaines et les unités; ainsi, la collection de neuf dixaines et de sept unités, se nomme *quatre-vingt-dix-sept* ou *nonante-sept*. On doit excepter de ce système les six premiers des neuf nombres compris entre dix et vingt; car au lieu des mots, dix-un, dix-deux, dix-trois, dix-quatre, dix-cinq, dix-six, on dit : *onze*, *douze*, *treize*, *quatorze*, *quinze*, *seize*.

La collection de neuf dixaines et de neuf unités, compose le nombre *nonante-neuf;* celui-ci augmenté d'un, donne le nombre *cent*, composé de dix dixaines, et la réunion de dix dixaines se nomme *centaine*. On compte depuis une centaine jusqu'à neuf centaines; et pour énoncer les nombres compris entre deux centaines consécutives, on ajoute aux noms, cent, deux cents, ..., neuf cents, ceux des nonante-neuf premiers nombres. Ainsi, la collection de quatre centaines et de huit unités, se nomme *quatre cent huit*. On parvient ainsi au nombre neuf cent nonante-neuf; celui-ci augmenté d'un, donne le nombre *mille*, composé de dix centaines. Opérant sur les mille, comme sur les centaines, on compte depuis un mille jusqu'à neuf mille; ce qui conduit au nombre neuf mille neuf cent nonante-neuf. Ce dernier augmenté d'un, forme le nombre *dix mille*. Comme jusqu'ici l'assemblage de dix unités d'un certain ordre a formé un nouvel ordre d'unités, l'*analogie* conduirait

à exprimer dix mille, par un nouveau nom; mais pour diminuer le nombre des mots, on considère le *mille*, comme une nouvelle unité; et de même qu'on avait compté par unités, dixaines et centaines, depuis une unité jusqu'à mille unités, on compte par unités, dixaines et centaines de *mille*, depuis une unité de *mille* jusqu'à mille unités de *mille*, qu'on nomme *million*. Quant aux nombres compris entre deux mille consécutifs, on ajoute au nom des mille, les noms des neuf cent nonante-neuf premiers nombres. Ainsi, la collection de sept mille et de cinq cent sept unités, se nomme sept mille cinq cent sept. Le nombre, neuf cent nonante-neuf mille, neuf cent nonante-neuf, augmenté d'un, donne le *million*, composé de mille mille; la collection de mille millions, se nomme *billion*; celle de mille billions, donne le *trillion*; et en continuant d'après ce système, on nomme *quatrillion*, *quintillion*, etc., l'assemblage de mille unités de l'ordre inférieur. Les noms des nombres compris entre un million et un billion, s'obtiennent en ajoutant successivement à chacun des noms, un million, deux millions, ... , neuf cent nonante-neuf millions, ceux des neuf cent nonante-neuf mille neuf cent nonante-neuf premiers nombres. On passe de même du *billion* au *trillion*, du *trillion* au *quatrillion*, et ainsi de suite.

7. On peut observer que *le nom d'un nombre ne dépend jamais que de la combinaison des noms des neuf cent nonante-neuf premiers nombres, avec les mots, unité, mille, million, billion*, etc.; *de sorte que l'énoncé d'un nombre, n'exprime jamais plus de neuf unités, neuf dixaines et neuf centaines de chaque espèce.*

8. Passons à la dernière partie de la numération, où l'on donne le moyen d'*écrire les nombres par une méthode plus abrégée et plus propre à leur calcul*. La manière d'écrire tous les mots au moyen des diverses combinaisons d'un petit nombre de lettres, fit pressentir la possibilité de représenter tous les nombres par un petit nombre de *signes*; on dut même prévoir que ces derniers, nommés *chiffres*, pourraient être en moindre nombre que les lettres, car ils ne doivent servir qu'à désigner une très-petite

partie des mots exprimés par les lettres. L'objet des chiffres étant d'abréger l'écriture des nombres, on dut suivre, dans leur invention, la route déjà tracée par l'invention des mots. Ainsi, de même qu'on avait adopté neuf noms simples pour les neuf premiers nombres, de même on adopta neuf chiffres pour les représenter ; et comme les combinaisons de ces neuf noms avec ceux des différentes unités, avaient donné les noms de tous les nombres, on soumit les chiffres à la même loi, en exprimant par un même chiffre, comme on avait énoncé par le même nom, un même nombre d'unités, de dixaines, de centaines, etc. On représenta donc les neuf premiers nombres

un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf,

par les chiffres,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Ce qui fournit le moyen de simplifier l'écriture des nombres, en remplaçant les nombres d'unités, de dixaines et de centaines de chaque ordre, par les chiffres qui les représentent. Ainsi, ayant le nombre *neuf cent quarante-sept unités*, on le décomposa en, *neuf* centaines, *quatre* dixaines et *sept* unités ; ce qui conduisit à

9 *centaines* 4 *dixaines* 7 *unités.*

Cette manière d'écrire le nombre proposé, n'est pas très-abrégée, mais elle met en évidence les nombres d'unités de chaque espèce, ce qui facilite les calculs.

On pourrait donc *écrire tous les nombres au moyen des seules combinaisons des neuf chiffres avec les noms, unités, dixaines, centaines, mille, millions, billions*, etc.

La nécessité de soumettre les nombres à diverses opérations, fit apercevoir que le mélange des mots, unités, dixaines, etc., avec les chiffres, compliquait l'écriture des nombres, et que par conséquent *il était utile de faire disparaître les lettres.* Pour y parvenir, on classa les noms des unités, dixaines et centaines de chaque ordre, suivant leur rang; les unités simples furent nommées *unités du premier ordre;* les dixaines, *unités*

du deuxième ordre ; les centaines, *unités du troisième ordre ;* les mille, *unités du quatrième ordre ;* etc. D'après cette convention, le nombre *neuf cent quarante-sept* peut s'écrire :

9 *unités du* 3e *ordre*, 4 *unités du* 2e *ordre*, 7 *unités du* 1er *ordre.*

Cette dernière forme, quoique la plus compliquée, fournit l'idée heureuse de disposer les chiffres à côté les uns des autres, de manière que le rang de chacun indiquât l'ordre des unités qu'il représente. On convint que de plusieurs chiffres mis à côté les uns des autres, le premier, à partir de la droite, exprimerait des unités du premier ordre, ou unités simples ; le deuxième, des unités du deuxième ordre, ou dixaines ; le troisième, des centaines ; le quatrième, des mille ; le cinquième, des dixaines de mille ; etc. Le nombre, neuf cent quarante-sept, peut donc s'écrire ainsi, 947 ; car le chiffre 9 occupant la troisième place, à partir de la droite, vaudra neuf unités du troisième ordre, ou 9 centaines, ou neuf cents ; le deuxième chiffre 4, vaudra 4 unités du deuxième ordre, ou quatre dixaines, ou quarante ; enfin le premier chiffre 7, vaudra sept unités. L'assemblage 947, exprime donc *neuf cent quarante-sept* unités.

Beaucoup de nombres échappent à ce système ; on ne saurait, par son moyen, écrire un nombre qui ne contiendrait pas tous les ordres d'unités inférieurs à celui de ses plus hautes unités. Pour vaincre cette difficulté, on a inventé le chiffre auxiliaire 0, nommé *zéro*, qui n'ayant aucune valeur par lui-même, sert seulement à conserver aux *chiffres significatifs*, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, le rang qui convient à l'ordre de leurs unités. Ainsi, pour écrire, en chiffres, le nombre *neuf cent sept*, composé de neuf centaines et de sept unités, sans dixaines, on met un zéro entre 9 et 7, pour tenir la place des dixaines ; ce qui donne 907.

9. En général : *Pour mettre en chiffres, un nombre énoncé en lettres, ou dicté ; écrivez successivement à côté les uns des autres et en commençant par la gauche, les centaines, dixaines*

et unités de chaque ordre ternaire (*), *et remplacez par des zéros, celles de ces unités, dixaines et centaines qui pourraient manquer. Parvenu aux unités simples, le nombre énoncé sera écrit.* Appliquons cette règle au nombre

dix-sept millions cinq cent deux unités.

Les plus hautes unités de ce nombre étant des millions, il devra renfermer trois *tranches*, savoir, celle des *millions*, celle des *mille* et celle des *unités;* posant donc à chacune de ces *tranches*, les centaines, dixaines et unités énoncées et remplaçant celles qui manquent par des zéros, on écrira 17 000 502.

10. Réciproquement : *Pour énoncer ou dicter un nombre quelconque écrit en chiffres; partagez-le d'abord en tranches de trois chiffres, à partir de la droite, sauf à ne laisser qu'un ou deux chiffres dans la dernière tranche à gauche; commençant ensuite par la gauche, énoncez chaque tranche significative comme si elle était seule et donnez-lui le nom des unités de cette tranche. Ces unités sont de l'ordre du dernier chiffre à droite de la tranche que l'on considère; de sorte qu'en allant de droite à gauche, les noms des tranches de trois chiffres, ou des ordres ternaires, se succèdent ainsi : unités, mille, millions, billions,* etc. *Parvenu à la dernière tranche significative, à droite, le nombre proposé sera énoncé.* Si l'on applique cette règle au nombre 17 000 502, on le partagera en tranches de trois chiffres, à partir de la droite; et ajoutant à l'énoncé de chaque tranche significative, le nom de ses unités, on dira : *dix-sept* millions *cinq cent deux* unités.

* 11. Lorsqu'on veut énoncer un nombre écrit, on le partage en tranches de trois chiffres (n° 10); mais comme il est quelquefois utile de le partager autrement, nous donnerons cette règle générale : *Pour énoncer un nombre écrit en chiffres, partagé en tranches quelconques; il suffit, en partant de la première tranche à gauche, d'énoncer chaque tranche significative comme si elle était seule et de lui donner le nom de l'espèce d'unités de son dernier chiffre à droite; parvenu à la dernière tranche significative,*

(*) Par unités des *ordres ternaires*, on entend les *unités* simples, les *mille*, les *millions*, les *billions*, etc.

le nombre sera énoncé. Le nom de l'espèce d'unités du dernier chiffre à droite de chaque tranche, s'obtient en commençant par la droite et prononçant sur les chiffres du nombre donné, les noms, unités, dixaines, centaines, mille, etc., jusqu'au premier chiffre à droite que l'on considère. Ainsi, le nombre 12345 peut se décomposer, en 123 centaines et 45 unités, ou en 1234 dixaines et 5 unités.

12. Quand on considère un nombre, en faisant *abstraction* de la nature de ses unités, on dit pour cette raison qu'il est *abstrait;* lorsqu'on désigne l'espèce d'unités dont un nombre est composé, on dit qu'il est *concret.* Ainsi, 3, 5, 3 fois, sont des nombres *abstraits;* 3 lieues et 5 toises, sont des nombres *concrets.*

Dans toutes les questions de l'Arithmétique, la nature des unités du résultat étant connue d'avance, il ne s'agit que d'en déterminer le *nombre.* De sorte que *tout se réduit à opérer sur des nombres abstraits. Le calcul des nombres concrets dépendant de celui des nombres abstraits*, nous commencerons par ce dernier.

ADDITION.

13. *Le but de l'*ADDITION *est d'obtenir un nombre qui contienne à lui seul toutes les unités de plusieurs autres nombres.* Ce nombre se nomme leur *somme* ou leur *total.*

La somme de plusieurs nombres pourrait donc s'obtenir, en réunissant successivement toutes leurs unités. Mais on aperçoit aisément que si les nombres étaient très-grands, le calcul deviendrait excessivement long. On a cherché en conséquence à *faire dépendre l'addition totale, d'additions partielles plus simples.* Voici comment on y est parvenu. Dans l'addition des nombres 42 et 37, au lieu d'ajouter 42 fois l'unité à 37, pour découvrir la somme 79, on a dit : comme la somme des nombres 42 et 37, doit contenir toutes leurs parties, elle se compose des 40 unités et des 2 unités de 42, plus des 30 unités et des 7 unités de 37, ou, ce qui revient au même, des 4 dixaines et des 2 unités de 42, plus des 3 dixaines et des 7 unités de 37; réunissant les dixaines avec les dixaines et les unités avec les unités, la somme cherchée sera 7 dixaines et 9 unités, ou 79.

14. En général : *Pour additionner plusieurs nombres, il faut les mettre les uns sous les autres, de manière que leurs unités de même ordre se trouvent dans une même colonne verticale. On place ensuite un trait sous ces nombres, pour les séparer du résultat, qu'on mettra dessous. L'opération ainsi disposée, pour l'exécuter, on fait une somme des nombres contenus dans la colonne des unités; si cette somme n'excède pas 9, on l'écrit au résultat sous la colonne des unités, et si elle surpasse 9, on n'écrit que les unités, et l'on retient les dixaines pour les joindre à la colonne des dixaines, sur laquelle on opère de la même manière; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à la dernière colonne à gauche, dont on pose la somme telle qu'on la trouve; ce qui termine l'addition. Lorsqu'une somme partielle ne contient que des dixaines, sans unités, on met un zéro sous la colonne qui l'a fourni, pour tenir la place des unités de cette colonne et conserver aux chiffres du résultat le rang qui convient à la nature de leurs unités. Observez bien que la somme totale se compose de la réunion des sommes partielles des unités des différens ordres contenues dans les nombres donnés* (*). Voici des exemples :

Nombres à ajouter.....	1 234	8 706	37	26 467
	4 253	987	63	43 585
Sommes.....	5 487	9 693	100	70 052

REMARQUE. *L'addition de plusieurs nombres est ainsi réduite, à ajou-*

(*) *Pour effectuer l'addition, il est plus commode de commencer par la droite que par la gauche.* En effet; comme en allant de droite à gauche, dix unités d'un certain ordre en valent une de l'ordre suivant; *quand on commence par la droite*, si la somme des unités d'une colonne surpasse 9, elle contient des unités et des dixaines; on pose les unités au résultat, et l'on retient les dixaines pour les joindre à la colonne suivante; de cette manière, *l'addition de chaque colonne, donne toujours un chiffre du résultat. Il n'en serait pas de même si l'on commençait par la gauche*, car alors, si l'addition d'une colonne donnait plus de 9, comme on ne peut jamais poser un chiffre plus grand que 9, il faudrait écrire les unités et ajouter les dixaines de surplus au chiffre déjà placé sous la colonne précédente; ce qui ne pourrait se faire qu'en changeant ce chiffre; l'addition de chaque colonne ne donnerait donc pas toujours un chiffre du résultat.

ter successivement un nombre d'un seul chiffre, à un nombre connu. Ce qui exige une grande habitude du calcul.

SOUSTRACTION.

15. Dans la *soustraction*, on se propose, *connaissant la somme de deux nombres et l'un de ces nombres, de trouver l'autre nombre.* Ainsi, la somme de deux nombres étant 7, et l'un d'eux étant 4, le but de la *soustraction* est de trouver l'autre nombre 3. On peut y parvenir, en retranchant successivement 4 unités de 7. Le résultat 3, se nomme *reste*, *différence* ou *excès*; il exprime l'*excès* du plus grand des nombres donnés 7, 4, sur le plus petit. *La différence entre deux nombres, ajoutée au plus petit, doit donc donner le plus grand.* De sorte que *l'addition suffit, pour obtenir le résultat de la soustraction*, car on trouve le reste 3, en cherchant combien il faut ajouter d'unités au plus petit nombre 4, pour obtenir le plus grand nombre 7.

Ainsi : *la soustraction peut s'effectuer de deux manières, soit en ôtant du plus grand des deux nombres donnés, toutes les unités du plus petit, soit en cherchant ce qu'il faut ajouter au plus petit des nombres donnés, pour obtenir le plus grand. Le résultat exprime le reste cherché.* On calculera ainsi la différence entre deux nombres quelconques d'un seul chiffre.

La soustraction des nombres composés de plusieurs chiffres pourrait s'effectuer de la même manière; par exemple, on obtiendrait la différence 32, entre 59 et 27, soit en ôtant 27 fois l'unité de 59, soit en cherchant combien il faut ajouter d'unités à 27 pour trouver 59. Mais on remarquera, comme pour l'addition (n° 13), que si le nombre à soustraire était très-grand, l'opération, ainsi effectuée, deviendrait excessivement longue. Pour abréger on dira : ôter 27 unités de 59 unités, revient à ôter 2 dixaines et 7 unités, de 5 dixaines et 9 unités; retranchant donc, 2 dixaines de 5 dixaines, et 7 unités de 9 unités, le reste, composé de 3 dixaines et 2 unités, sera 32.

On ne peut plus suivre ce procédé, quand des chiffres du nombre à soustraire sont plus grands que ceux du même rang dans le nombre dont on soustrait. Par exemple, pour retran-

cher 29 de 67, on serait conduit à ôter 9 unités de 7 unités; ce qui ne peut se faire; la soustraction totale est cependant possible, car en ôtant 29 fois l'unité de 67, on trouve 38 de reste. Afin de rendre possibles les soustractions partielles, on *emprunte* une des 6 dixaines de 67; ce qui revient à décomposer 67, en 5 dixaines et 17 unités; la question est ainsi réduite à retrancher les 2 dixaines et les 9 unités du nombre 29, des 5 dixaines et des 17 unités du nombre 67; ce qui donne le reste 38.

Il est un cas qui pourrait encore embarrasser, c'est celui où le chiffre sur lequel on devrait emprunter serait zéro. En voici un exemple :

De	8005,	ou	7 mille,	9 centaines,	9 dixaines,	15 unités
ôtez	467,	ou		4 centaines,	6 dixaines,	7 unités
Reste	7538,	ou...	7 mille,	5 centaines,	3 dixaines,	8 unités.

Comme on ne peut ôter 7 de 5, il faut *emprunter;* or l'*emprunt* ne peut se faire que sur le premier chiffre significatif 8, car les zéros qui le précèdent n'ont aucune valeur; on empruntera donc un mille, sur les 8; ce mille valant 10 centaines, on en laissera 9 sur les centaines; la centaine qui reste, valant 10 dixaines, on en laissera 9, au rang des dixaines et la dixaine qui reste, jointe aux 5 unités, donnera 15 unités. Le mille emprunté se trouve ainsi décomposé en, 9 centaines, 9 dixaines et 10 unités. On voit que cela se réduit à diminuer d'un le chiffre 8, sur lequel on emprunte, à compter les zéros pour des 9, et à ajouter 10 aux 5 unités. Retranchant 7 unités de 15 unités, 6 dixaines de 9 dixaines, 4 centaines de 9 centaines, et diminuant le 8 de l'unité de mille empruntée, on trouvera 7538 pour le reste demandé.

16. En général : *Pour retrancher un nombre d'un autre, placez le plus petit sous le plus grand, de manière que les unités de même ordre se correspondent; mettez un trait sous les deux nombres, pour les séparer du résultat, que vous placerez dessous. L'opération ainsi disposée, retranchez chaque chiffre inférieur du chiffre supérieur correspondant, en commençant par la droite et plaçant chaque reste partiel sous la colonne qui l'a*

fourni. Quand le chiffre inférieur ne surpassera pas le chiffre supérieur correspondant, posez leur différence dessous; lorsque le chiffre inférieur manquera, ou sera zéro, posez au résultat le chiffre supérieur correspondant, en ayant soin de le diminuer d'un, si vous avez emprunté sur lui pour effectuer les soustractions précédentes; enfin, quand le chiffre inférieur sera plus grand que le chiffre supérieur correspondant, empruntez une des unités du premier chiffre significatif à gauche, qui devra par conséquent être diminué d'un; augmentez de dix le chiffre supérieur sur lequel vous opérez, et s'il y a des zéros compris entre ce chiffre et celui sur lequel vous avez emprunté, comptez ces zéros pour des neuf. Lorsque vous serez parvenu à la dernière colonne à gauche, vous poserez dessous le reste qu'elle fournira; ce qui terminera l'opération (*). Voici des exemples :

De.....	5 487	9 693	100	70 052	900100	10000
ôtez.....	1 234	8 706	37	26 467	870123	9999
Reste.....	4 253	987	63	43 585	29977	1

REMARQUE. On voit que *pour être en état d'effectuer les soustractions les plus composées, il suffit de savoir retrancher les nombres d'un seul chiffre, des nombres moindres que* 19. Sous ce point de vue, *la soustraction est plus facile à exécuter que l'addition* (*Remarque du* n° 14). Cela devait nécessairement arriver, car dans la soustraction, on n'opère que sur deux nombres donnés, tandis que dans l'addition, on peut avoir à opérer sur beaucoup de nombres.

MULTIPLICATION.

17. *Le but de la* MULTIPLICATION *est de prendre un nombre, nommé* MULTIPLICANDE, *autant de fois qu'il y a d'unités,*

(*) *Quand le nombre à soustraire ne surpasse pas celui dont on veut le soustraire, on peut toujours effectuer la soustraction en la commençant par la droite. Il n'en serait pas de même en la commençant par la gauche;* car alors, si la soustraction étant possible, quelques chiffres du nombre à soustraire étaient plus grands que les chiffres correspondans du nombre dont on veut le soustraire, comme les chiffres précédens seraient employés par les soustractions précédentes, on ne pourrait plus, quand un chiffre inférieur serait plus grand que le chiffre supérieur correspondant, rendre la soustraction possible, par un emprunt sur le chiffre supérieur précédent, puisque ce chiffre aurait été employé.

dans un autre nombre, *nommé* MULTIPLICATEUR ; *se nomme* PRODUIT. Le multiplicande et le mult ayant tous deux concouru à la *formation* du produi dits les *facteurs*. D'après cela :

1°. *Le multiplicateur est essentiellement abstrai* marque combien de fois l'on doit prendre le multi 2°. *le produit est de la nature du multiplicande ;* 3 *le multiplicande étant zéro, le multiplicateur est un le produit est zéro*, car zéro répété plusieurs fo zéro ; 4°. *pour multiplier un nombre par un autre d'écrire le premier, autant de fois qu'il y a d'unité second et de faire la somme ; cette somme est le pr mandé.* Ainsi, multiplier 5 par 3, c'est prendre 3 faut donc écrire 5, trois fois et faire l'addition ; la plus 5 plus 5, ou 15, étant composée de 5, pris troi prime le produit de 5 par 3.

18. La multiplication pouvant s'effectuer par l'ad est facile de former les *produits deux à deux des non seul chiffre.* Ces produits sont réunis dans la table attribuée à *Pythagore :*

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Le produit de deux nombres d'un seul chiffre se tr

rencontre de la ligne horizontale et de la ligne verticale, dont chacune commence par l'un des deux facteurs. Ainsi, le produit 48, de 6 par 8, est à la rencontre des deux lignes, dont l'une commence par 6 et l'autre par 8.

Je désignerai sous le nom de *multiples* d'un nombre, ses divers produits par 1, 2, 3, 4, 5, etc. Ainsi, un nombre répété plusieurs fois, donne un produit qui est *multiple* de ce nombre. Un produit est donc multiple de chacun de ses facteurs. Par exemple, 3 fois 5, ou 15, est *multiple* de 3 et de 5.

19. On remarque dans la table de multiplication, que *le produit de deux nombres d'un seul chiffre reste le même dans quelque ordre qu'on effectue la multiplication. L'analogie* porte à croire que la même propriété subsiste pour tous les nombres; mais comme il est important d'accoutumer aux démonstrations rigoureuses, nous allons prouver directement, que *dans quelque ordre qu'on effectue la multiplication de deux nombres, leur produit doit rester le même.* La nécessité de démontrer ce principe est mise en évidence, quand on effectue la multiplication à l'aide de l'addition. Prenons, par exemple, le produit des nombres 3 et 2; il s'agit de faire voir que 3 plus 3, ou 2 fois 3, doit être égal à 2 plus 2 plus 2, ou à 3 fois 2. Pour y parvenir, on forme le tableau suivant :

1, 1, 1,
1, 1, 1.

La somme des unités contenues dans ce tableau, peut être considérée comme formée : ou de 2 rangées horizontales de 3 unités chacune, c'est-à-dire de 3 pris 2 fois; ou de 3 colonnes verticales de 2 unités chacune, c'est-à-dire de 2, pris 3 fois; 3 pris 2 fois, doit donc donner la même somme d'unités, et par conséquent le même nombre, que 2 pris 3 fois; le produit de 3 par 2, doit donc être le même que celui de 2 par 3; le produit des deux nombres 2 et 3, ne doit donc pas changer dans quelqu'ordre qu'on effectue la multiplication.

20. Si l'on refléchit sur la nature de cette démonstration, on sentira que les raisonnemens sur lesquels elle repose, sont

indépendans des nombres particuliers 3 et 2, que l'on n'a considérés que pour fixer les idées, et que par conséquent la même propriété doit subsister pour tous les nombres. En effet; nous avons prouvé que le produit de 3 par 2, devait être le même que celui de 2 par 3, et cela sans déterminer le nombre des unités contenues dans chacun de ces produits; *la démonstration est donc indépendante de la valeur numérique du résultat; elle est donc générale.*

21. Ainsi, *dans quelqu'ordre qu'on effectue la multiplication de deux nombres, leur produit doit rester le même.*

22. *Le produit de deux nombres quelconques ne dépend que des produits deux à deux des nombres d'un seul chiffre.* Pour fixer les idées, proposons-nous de multiplier 847, par 256; après avoir disposé le calcul de la manière suivante :

847	*multiplicande.*
256	*multiplicateur.*
5 082	1er *produit partiel, de* 847 *par* 6.
42 350	2e *produit partiel, de* 847 *par* 50.
169 400	3e *produit partiel, de* 847 *par* 200.
216 832	*somme des produits partiels, ou produit total de* 847 *par* 256.

on observera que multiplier 847 par 256, c'est prendre le multiplicande 256 fois, ou 200 fois, plus 50 fois, plus 6 fois; ce qui revient à multiplier successivement 847, par les parties 200, 50 et 6, du multiplicateur; la somme de ces produits partiels sera le produit total de 847 par 256. Voyons donc comment on peut former ces trois produits partiels; l'ordre est indifférent, mais on commence ordinairement par les unités du multiplicateur. 1°. Pour obtenir le produit de 847 par 6, on pourrait écrire 847, 6 fois; la somme 5082, serait le produit demandé; mais comme cette addition revient à prendre, 6 fois les 7 unités, 6 fois les 4 dixaines et 6 fois les 8 centaines, du multiplicande 847, on peut se dispenser d'écrire 6 fois 847 et dire: 6 fois 7 font 42, je pose 2 et je retiens 4 dixaines; 6 fois 4 dixaines donnent 24 dixaines et 4 de retenue, valent 28 dixaines, ou 2 centaines et 8 dixaines; j'écris donc les 8 dixaines, et

j'ajoute les 2 centaines de retenue à 6 fois 8 centaines ; ce qui me donne 50 centaines, que je pose ; 2° le produit de 847 par 50, est composé de 50 fois 847, ou de 847 fois 50 (n° 21), ou de 847 fois 5 *dixaines ;* mais *les unités du produit sont de la nature des unités du multiplicande* (n° 17. 2°) ; les unités du produit, 847 fois 5 *dixaines*, seront donc des unités de *dixaines*, et leur nombre sera 847 fois 5, ou 5 fois 847. Cela démontre que pour multiplier 847 par 50, il suffit de multiplier 847 par 5 et de poser le produit 4235 au rang des *dixaines*, ce qui revient à placer le premier chiffre 5 de ce produit, sous le chiffre du multiplicateur qui a donné ce produit partiel. 3°. On prouverait de la même manière, que multiplier 847 par 200, se réduit à multiplier 847 par 2 et à mettre le produit 1694, au rang des centaines. La somme des trois produits partiels, ainsi obtenus, compose le produit total 216 832. On voit donc que pour multiplier 847 par 256, il suffit de multiplier successivement 847 par chacun des chiffres 6, 5, 2, du multiplicateur, considérés comme des unités simples et de placer le premier chiffre de chaque produit partiel sous le chiffre qui a servi de multiplicateur. Ainsi :

23. En général : *Pour multiplier un nombre par un autre ; écrivez le multiplicateur sous le multiplicande et mettez un trait sous ces deux nombres, pour les séparer des produits partiels ; multipliez le multiplicande successivement par chaque chiffre significatif du multiplicateur, en plaçant le premier chiffre de chaque produit partiel, sous le chiffre qui a servi de multiplicateur ; mettez un trait sous les produits partiels ; leur somme, que vous poserez dessous, sera le produit total.* L'application de cette règle, conduit aux résultats suivans.....

Multiplicande.....	302	78	467 800 400 988 999
Multiplicateur.....	78	302	909
	2 416	156	4 210 203 608 900 991
	21 140	23 400	421 020 360 890 099 100
Produit.....	23 556	23 556	425 230 564 499 000 091

24. *Pour former le produit de plusieurs nombres, il suffit de multiplier le premier nombre par le second; on multiplie ensuite le produit des deux premiers nombres par le troisième, et ainsi de suite, jusqu'à l'entier épuisement des facteurs. Le dernier de ces produits est le produit demandé.* Ainsi, pour obtenir le produit 30, des trois nombres 2, 3, 5, on multipliera 2 par 3; le résultat 6, multiplié par 5, donnera 30.

* 25. *Le produit d'un nombre quelconque de facteurs ne change pas dans quelqu'ordre qu'on effectue les multiplications.* En effet; considérons le produit des nombres 2, 3, 4; le produit ne change pas quand on change l'ordre des deux premiers facteurs, car les produits 2.3,3.2 (*) étant égaux, si on les multiplie par 4, les résultats $2.3\times4, 3.2\times4$, seront égaux. Il suffit donc de prouver qu'on peut changer l'ordre des deux derniers facteurs. Cela n'offre aucune difficulté, car on a

$$2\times3=2+2+2; \quad \text{d'où} \quad 2\times3\times4=2\times4+2\times4+2\times4=2.4\times3=2\times4\times3.$$

(*) Quand nous supposerons que le produit de plusieurs facteurs sera effectué, nous placerons des *points* entre ces facteurs, et lorsque nous voudrons indiquer que les multiplications ne seront pas effectuées, nous séparerons les facteurs par le *signe* $\times$. Ainsi, 2.5, représentera le nombre 10, tandis que 2×5 indiquera un *produit non effectué*. L'expression 3×5.2, indiquera le produit non effectué de 3 par 10, et $2\times3\times5$ marquera que le produit des facteurs 2, 3, 5, n'est pas formé; pour obtenir ce produit, dans l'ordre indiqué, on multiplierait d'abord 2 par 3, ce qui donnerait 2.3, ou 6; le résultat multiplié par 5, donnerait 2.3×5 ou 6×5, ou 30, pour le produit demandé. Les expressions $2\times3\times5$ et $2\times5\times3$, indiquent des opérations essentiellement différentes, car la première représente 6×5 et la seconde 10×3; les résultats de ces deux dernières opérations seraient égaux; mais comme on les obtient par des calculs essentiellement différens, il est nécessaire de prouver cette égalité par le raisonnement. *Le véritable sens de ces expressions mérite toute l'attention des élèves*; plusieurs auteurs ont donné des démonstrations fausses du principe du n° 25, en confondant des expressions qui n'étaient semblables qu'en *apparence*. Enfin, pour abréger, nous ferons usage des *signes*

$$+ \quad - \quad = \quad . \quad >$$

qui signifient respectivement,

plus, moins, égal, plus grand que.

Ainsi, $2+3=7-2$, exprimera que 2 *plus* 3 est *égal* à 7 *moins* 2, et $5>3$ indiquera que 5 est *plus grand* que 3.

Le produit de trois nombres ne changeant pas quand on change l'ordre des deux premiers facteurs ou celui des deux derniers, on a

$$2\times3\times4=2\times4\times3=4\times2\times3=4\times3\times2=3\times4\times2=3\times2\times4$$

Le principe est donc démontré pour trois facteurs.

On en déduit que le produit de quatre nombres ne change pas dans quelqu'ordre qu'on effectue la multiplication. En effet; on a

$$2.3\times4=2.3+2.3+2.3+2.3$$

Multipliant par 5, il vient

$$2.3.4\times5=2.3\times5+2.3\times5+2.3\times5+2.3\times5=2.3.5\times4$$

Le produit de quatre nombres ne change donc pas quand on change l'ordre des deux derniers facteurs. Mais, on peut changer l'ordre des trois premiers facteurs; on a donc...

$$2\times3\times4\times5=2\times4\times3\times5=3\times4\times2\times5=3\times2\times4\times5=3\times2\times5\times4=\text{etc.}$$

Le principe étant ainsi démontré pour quatre facteurs, on en déduira qu'il est vrai pour cinq facteurs, et ainsi de suite.

* 26. *Multiplier un nombre par un produit, revient à multiplier successivement ce nombre par les facteurs du produit, et réciproquement.* Par exemple, multiplier 2 par le produit 15, des facteurs 3 et 5, revient à multiplier d'abord 2 par 3 et le produit 6, par 5; il s'agit donc de prouver que $2\times3.5=2\times3\times5$, et que réciproquement $2\times3\times5=2\times3.5$. Cela n'offre aucune difficulté, car les principes des n°s 21 et 25, donnent

$$2\times3.5=3.5\times2=3\times5\times2=2\times3\times5$$
$$2\times3\times5=3\times5\times2=3.5\times2=2\times3.5$$

Cette démonstration convient à un nombre quelconque de facteurs.

DIVISION.

27. *Le but de la* DIVISION *est, connaissant un produit, nommé* DIVIDENDE *et l'un de ses facteurs, nommé* DIVISEUR, *de trouver l'autre facteur, nommé* QUOTIENT. Par exemple, si l'on proposait, connaissant le produit 6, des facteurs 2, 3, et le facteur 3, de découvrir le facteur 2; le produit 6, prendrait le nom de *dividende*, le facteur connu 3, s'appellerait *diviseur*, le facteur 2, qu'il s'agit de découvrir, se nommerait *quotient*, et l'opération qui donnerait le quotient se nommerait *division*.

28. D'après la définition de la division; 1°. *quand le diviseur est abstrait, le quotient est de la nature du dividende*, car ce

quotient, multiplié par le diviseur, doit reproduire le dividende; 2°. *lorsque le dividende étant zéro, le diviseur est un nombre, le quotient est zéro;* car le quotient zéro, multiplié par le diviseur, qui est un nombre, donne un produit égal au dividende zéro. Il en résulte que *zéro est exactement divisible par tous les nombres et donne zéro pour quotient;* 3°. *lorsque le dividende et le diviseur sont zéro, le quotient est entièrement* INDÉTERMINÉ, c'est-à-dire qu'on peut prendre un nombre arbitraire pour le quotient, car le diviseur zéro, répété un nombre quelconque de fois, donne un produit égal au dividende zéro.

29. Le dividende étant le produit du diviseur par le quotient, *le diviseur, pris autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient, donne le dividende. Le quotient abstrait exprime donc combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende.* D'après cette remarque, *le quotient peut toujours s'obtenir par des soustractions répétées*, car en retranchant successivement le diviseur du dividende, le nombre de soustractions faites pour arriver au reste zéro, marque combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. Sous ce point de vue, la division ne serait pas une nouvelle règle; mais comme, en suivant ce procédé, l'opération devient longue et pénible, quand le dividende contient un grand nombre de fois le diviseur, on est conduit à la recherche d'une méthode plus abrégée. C'est à cette méthode qu'appartient le nom de *division.* Cela posé :

Le quotient doit être tel, qu'en multipliant ses unités, ses dixaines, etc., par le diviseur, on obtienne, au produit total, les unités, les dixaines, etc., du dividende, car le dividende est un produit dont le diviseur et le quotient sont les facteurs (n° 27). Appliquons ce principe à la recherche du quotient de la division de 1468 par 4; le quotient doit être tel, que ses unités, ses dixaines, etc., multipliées par le diviseur 4, donnent au produit total, les unités, les dixaines, etc., du dividende; le quotient ne peut donc pas admettre d'unités d'un ordre plus élevé que les plus hautes unités du dividende, qui sont

des mille. Et en effet, s'il renfermait seulement une dixaine de mille, en la multipliant par le diviseur, on obtiendrait un produit, 4 dixaines de mille, qui devrait faire partie du dividende 1468; ce qui est absurde. Le quotient n'aura pas non plus de mille, car s'il en contenait seulement un, la multiplication de ce mille par le diviseur, donnerait le produit partiel 4 mille, qui ne peut faire partie du dividende 1468. Le quotient contient des centaines, car une centaine, multipliée par le diviseur 4, donne 4 centaines, et le dividende 1468, en contient 14. Actuellement que nous avons déterminé la nature des plus hautes unités du quotient (*), cherchons-en le nombre; le produit partiel des centaines du quotient par le diviseur, donnant des centaines, ne peut se trouver que dans les 14 centaines du dividende; ces 14 centaines sont donc composées du produit des centaines du quotient par le diviseur 4, et de la retenue de centaines qu'a pu fournir la multiplication des dixaines et des unités du quotient par le diviseur; le *multiple* de 4, immédiatement au-dessous de 14, qui est 12, sera donc le produit partiel du diviseur 4, par le nombre des centaines du quotient; on obtiendra donc ce nombre de centaines, en divisant 12 par 4; ce qui donne 3 centaines au quotient; le quotient est donc composé de 3 centaines, de dixaines et d'unités. On peut d'ailleurs le démontrer directement, car le dividende 1468, tombant entre 4 fois 3 centaines, et 4 fois 4 centaines, le quotient doit tomber entre 3 et 4 centaines. Cela posé; si du dividende 1468, qui contenait les trois produits partiels des centaines, des dixaines et des unités du quotient par le diviseur, on retranche le produit 1200, des 3 centaines

(*) On doit commencer par la recherche des plus hautes unités du quotient, car dans la formation d'un produit, on commence par la multiplication des plus faibles unités du multiplicande, afin de pouvoir joindre la retenue de chaque produit partiel au produit partiel suivant; la division, qui a pour but de décomposer le produit, doit donc procéder dans un ordre inverse; *il est donc indispensable de commencer par la recherche des plus hautes unités du quotient.*

du quotient par le diviseur, le *reste* 268 ne sera plus composé que des produits partiels des dixaines et des unités du quotient par le diviseur. On peut donc considérer le *reste* 268, comme un nouveau dividende partiel, composé du produit du diviseur 4, par un quotient partiel dont les unités et les dixaines sont celles du quotient total; tout se réduit donc à diviser 268 par 4. Or, nous savons que les plus hautes unités du quotient sont des dixaines; leur produit par le diviseur ne peut donc se trouver que dans les 26 dixaines de 268; mais ces 26 dixaines sont composées du produit des dixaines du quotient par le diviseur 4 et de la retenue de dixaines qu'a pu fournir la multiplication des unités du quotient par 4; le multiple de 4 immédiatement au-dessous de 26, qui est 24, sera donc le produit du diviseur 4 par le nombre des dixaines du quotient; on obtiendra donc ce nombre de dixaines, en divisant 24 par 4; cela donnera 6, pour le nombre des dixaines du quotient. Si du dividende partiel 268, composé des produits partiels du diviseur 4, par les dixaines et par les unités du quotient, on retranche le produit 24 dixaines, des 6 dixaines du quotient par le diviseur, le *reste* 28 sera le produit des unités du quotient par le diviseur 4; la division de 28 par 4, donnera donc les 7 unités du quotient. La réunion des quotiens partiels, 3 centaines, 6 dixaines, 7 unités, donnera 367 pour le quotient total de 1468 par 4. Le quotient 367, multiplié par le diviseur 4, reproduit effectivement le dividende 1468.

Pour jeter plus de clarté sur ces diverses opérations, on les dispose de la manière suivante:

Dividende.....	1468	4 diviseur.
	1200	367 quotient.
	268	
	240	
	28	
	28	
	0	

Commençant l'opération par la gauche du dividende, on

divise 12 centaines (multiple du diviseur 4 immédiatement au-dessous des 14 centaines du dividende) par le diviseur 4; cela donne 3 centaines, qu'on écrit au rang des centaines du quotient; multipliant ensuite le quotient partiel 3 centaines, par le diviseur 4, on porte le produit 12 centaines, ou 1200, sous le dividende 1468, en faisant correspondre les unités du même ordre; on retranche 1200 de 1468 et l'on pose le *reste* 268 sous 1200, en l'en séparant par un *trait*. Opérant sur ce reste, comme sur le dividende primitif 1468, on divise 24 dixaines (multiple du diviseur 4 immédiatement au-dessous des 26 dixaines du dividende partiel 268), par le diviseur 4; cela donne 6 dixaines, que l'on écrit au rang des dixaines du résultat; multipliant ces dixaines, par le diviseur 4, on met le produit 24 dixaines, ou 240, sous le *reste* 268; on ôte 240 de 268 et l'on pose dessous le *reste* 28; enfin, on divise 28 par 4; ce qui donne 7, que l'on écrit au rang des unités du quotient. Multipliant les 7 unités du quotient, par le diviseur 4, on trouve 28 unités, que l'on place sous le *reste* 28; on retranche 28 de 28 et l'on pose dessous le *reste* zéro. L'opération est alors terminée et l'on a 367, pour le quotient demandé.

30. *Dans toute division, le dividende est égal au produit du diviseur par les unités du quotient, plus le dernier reste;* et par conséquent, *lorsqu'après avoir épuisé tous les chiffres du dividende, le dernier reste est zéro, le quotient obtenu est exact.* En effet; pour trouver le *dernier reste*, on retranche successivement du dividende, les produits partiels du diviseur par les chiffres du quotient; ce qui revient à retrancher du dividende, le produit total du diviseur par le quotient; le dernier reste exprime donc l'excès du dividende, sur le produit du diviseur par le quotient; le dividende est donc égal au produit du diviseur par le quotient, plus le dernier reste; et par conséquent, lorsque le dernier reste est zéro, le quotient est exact. Ainsi, la division de 27 par 6, donnant 4 au quotient et 3 de reste, on a

$$27 = 6 \times 4 + 3.$$

Le même raisonnement s'applique à un reste et à un quotient

correspondans quelconques. Ainsi, dans l'exemple du n° 29, le reste 28, correspondant au quotient 360, on a

$$1468 = 4 \times 360 + 28.$$

31. En général, *pour diviser deux nombres l'un par l'autre, écrivez le diviseur sur la droite du dividende; en l'en séparant par un trait; placez un autre trait sous le diviseur, pour le séparer du quotient que vous écrirez dessous. L'opération ainsi disposée, pour l'effectuer; prenez assez de chiffres sur la gauche du dividende, pour que le nombre qui en résulte, considéré comme exprimant des unités simples, contienne le diviseur; cherchez combien de fois ce dividende partiel contient ce diviseur; ce nombre de fois sera le premier chiffre à gauche du quotient; il exprimera des unités de l'ordre du dernier chiffre à droite du dividende partiel qui l'aura fourni. Ecrivez le premier chiffre du quotient sous le diviseur; multipliez le diviseur par le premier chiffre du quotient et mettez le produit sous le premier dividende partiel; placez un trait sous ces deux nombres; retranchez le plus petit du plus grand; écrivez dessous le reste, et abaissez sur sa droite le chiffre suivant du dividende total; vous aurez un nouveau dividende partiel, sur lequel opérant comme sur le précédent, vous obtiendrez le second chiffre du quotient, que vous écrirez à la droite du premier. Vous répéterez les mêmes opérations jusqu'à l'entier épuisement des chiffres du dividende; quand le dernier reste sera zéro, la division sera terminée et le quotient obtenu sera le quotient demandé; quand le dernier reste ne sera pas zéro, cela indiquera que le quotient demandé n'est pas assignable en nombre entier; le nombre obtenu au quotient exprimera les unités du quotient total. La somme des quotiens partiels, compose le quotient total. Lorsqu'un dividende partiel est moindre que le diviseur, on place un zéro pour le chiffre correspondant du quotient; par ce moyen, les chiffres significatifs du quotient conservent le rang qui convient à l'espèce des unités qu'ils représentent, et chacun des chiffres du dividende, qui suivent*

le premier dividende partiel, donne un chiffre du quotient. Voici des exemples :

	23 556	302		23556	78	23559	78
	21 14	78		234	302	234	302
	2 416			15		15	
	2 416			156		159	
Reste..	0			156		156	
			Reste...	0	Reste...	3	

Remarque. Lorsqu'on divise un nombre par 5, ou par 6, ou par 7, ou par 8, ou etc., on dit qu'on en prend le *cinquième*, ou le *sixième*, ou le *septième* ou le *huitième*, ou etc. Ainsi, le septième de 28 est 4, le huitième de 40 est 5, etc.

Preuves des quatre Règles.

32. Le but de la *preuve* est de vérifier le résultat par une opération différente de celle qui l'a fourni. On risquerait, en recommençant le même calcul, de répéter la même erreur ; ce qui empêcherait de l'apercevoir.

Pour faire la preuve de l'ADDITION ; *additionnez successivement chaque colonne verticale, en commençant par la première à gauche ; retranchez chaque somme partielle de celle qu'elle est censée avoir donnée ; écrivez les restes, chacun sous la colonne correspondante. Quand la somme sera exacte, le dernier reste placé sous la dernière colonne à droite, sera zéro. Le reste placé sous chaque colonne, exprime des dixaines d'unités de la colonne suivante.*

Pour faire la preuve de la SOUSTRACTION ; *ajoutez le* RESTE *au plus petit nombre ; la somme devra être égale au plus grand nombre* (n° 15).

La preuve de la MULTIPLICATION *s'effectue en divisant le produit par l'un de ses facteurs ; le quotient doit être égal à l'autre facteur. On peut aussi changer l'ordre des facteurs, le produit ne doit pas changer* (n° 21).

Une DIVISION *a été bien faite, quand le diviseur multiplié par le quotient, donne un produit égal au dividende* (n° 27); *elle est encore exacte, quand le dividende, divisé par le quotient, donne le diviseur.* Voici un exemple de chaque espèce...

Addition.	*Soustraction.*	*Multiplication.*		*Division.*	
598	de..... 45	48		432	48
979	ôtez..... 16	9		quotient....	9
757	reste..... 29	produit... 432	48	preuve	432
Somme. 2334	preuve... 45	preuve...	9		
Preuve.. 220					

La manière de vérifier les trois dernières opérations n'étant qu'une suite immédiate de leurs définitions, nous nous bornerons à expliquer la *preuve de l'addition;* elle a pour but d'extraire successivement de la somme, les parties qui la composent, en procédant dans un ordre contraire à celui de sa formation; le dernier reste doit donc être zéro. Ainsi, pour vérifier si 2334 est la somme des nombres proposés, on commencera par la gauche, et l'on dira : la colonne des centaines en contient $5+9+7$, ou 21; mais la somme renferme 23 centaines; les 2 centaines de surplus proviennent donc de la *retenue* de 20 dixaines, faite dans l'addition de la colonne des dixaines; cette colonne devrait donc renfermer 23 dixaines; mais elle n'en contient que 21; les 2 dixaines de surplus résultent donc de la *retenue* de 20 unités, faite dans l'addition de la colonne des unités, qui doit conséquemment avoir donné 24 unités. La colonne des unités doit donc contenir 24 unités, car n'étant précédée d'aucune colonne à droite, elle ne peut avoir été augmentée par aucune *retenue;* cette colonne contient effectivement 24 unités, de sorte que la *retenue* placée au rang des unités est zéro. La somme obtenue est donc exacte.

Fractions (n° 34).

33. La division conduit aux *fractions*, quand le dernier *reste* n'est pas nul. Par exemple, si l'on voulait diviser 25 par 7, il faudrait trouver un nombre qui, multiplié par 7, reproduisît 25; or 25 tombe entre 3×7 et 4×7; le quotient est donc plus grand que 3 et plus petit que 4; il n'est donc pas assignable en nombre entier. Pour s'en former une idée exacte, on observera que 25 étant composé de $21 + 4$, on aurait le quotient de 25 par 7, en réunissant celui de 21 par 7, à celui de 4 par 7. Or, le quotient exact de 21 par 7 est 3; il reste donc à diviser 4 par 7. Pour évaluer ce dernier quotient, on conçoit l'unité divisée en 7 parties égales; chacune de ces parties exprime le quotient de 1 par 7, puisque l'une d'elles prise sept fois, donne le dividende 1. Mais, $4 = 1 + 1 + 1 + 1$. On obtiendra donc le quotient de 4 par 7, en prenant 4 fois le *septième* de 1; de sorte que *un septième de 4 est la même chose que 4 fois le septième d'un*. Ajoutant les deux quotiens partiels de 21 par 7 et de 4 par 7, on voit que le quotient de 25 par 7 est formé, de 3 unités, plus de 4 des 7 parties égales dont on peut concevoir l'unité composée.

34. La partie qu'on ajoute aux unités du quotient, étant toujours moindre que l'unité, a reçu le nom de *fraction*. Ainsi, *lorsque le dividende ne contient pas exactement le diviseur, le quotient total se compose d'un nombre entier et d'une* FRACTION, *qui exprime la valeur du dernier reste divisé par le diviseur*. Pour indiquer cette division, on place le diviseur sous le dernier reste, et on l'en sépare par un *trait;* de sorte que le quotient de 25 par 7, qui est 3 plus 4 septièmes, s'écrit $3 + \frac{4}{7}$, ou $3\frac{4}{7}$ (*).

(*) Pour indiquer qu'une fraction est ajoutée à un nombre entier, on écrit ordinairement la fraction à la suite du nombre entier. De sorte que le signe + est sous-entendu. Ainsi $2\frac{3}{4}$ exprime $2 + \frac{3}{4}$.

35. Pour *énoncer les fractions*, on a donné des noms particuliers aux diverses subdivisions de l'unité. Quand l'unité est divisée en 2, 3, 4, parties égales, chacune de ces parties est appelée *un demi*, *un tiers*, *un quart*. Ainsi, les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, s'énoncent *un demi*, *un tiers*, *un quart*, et les fractions, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ s'énoncent, *deux tiers*, *trois quarts*. Lorsque l'unité est divisée en plus de quatre parties égales, on forme le nom de chaque partie, en ajoutant à la fin du mot qui désigne le nombre de ces parties, la terminaison *ième;* de sorte que diviser un nombre par 5 ou par 6, ou etc., c'est en prendre le cinqu*ième*, ou le six*ième*, ou etc., (remarque du n° 31). Ainsi, la fraction $\frac{1}{7}$ s'énoncera un sept*ième*, et la fraction $\frac{3}{7}$, qui vaut 3 fois $\frac{1}{7}$, s'énoncera trois sept*ièmes*. Comme dans une fraction, le nombre inférieur ne sert qu'à *dénommer* l'espèce des parties d'unité qui entrent dans la fraction, tandis que le nombre supérieur en désigne le *nombre;* le premier a reçu le nom de *dénominateur*, et l'autre celui de *numérateur*. Le numérateur et le dénominateur s'appellent les *deux termes* de la fraction.

36. *Un même énoncé pouvant convenir à plusieurs fractions différentes, on préviendra les erreurs, en mettant une virgule entre l'énoncé du numérateur et celui du dénominateur.* Par exemple, $\frac{10}{700}$, s'écrira *dix, sept centièmes*, et $\frac{17}{100}$, s'écrira *dix-sept, centièmes*.

37. *La valeur d'une fraction s'obtient également, ou en divisant le numérateur par le dénominateur, ou en divisant l'unité en un nombre de parties égales marqué par le dénominateur, et prenant autant de ces parties qu'il y a d'unités dans le numérateur.* Nous considérerons toujours les fractions sous ce dernier point de vue, parce qu'il est le seul qui convienne à leur calcul.

38. L'*addition* et la *soustraction*, *des fractions qui ont le même dénominateur*, n'offrent aucune difficulté. Par exemple, $\frac{2}{7}$ plus $\frac{3}{7}$, font $\frac{5}{7}$, car les fractions $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, exprimant 2 parties égales à $\frac{1}{7}$ et 3 parties égales à $\frac{1}{7}$; leur somme doit être composée de 2 parties, plus 3 parties, égales à $\frac{1}{7}$, c'est-à-dire de 5 parties égales à $\frac{1}{7}$, ou de $\frac{5}{7}$. S'il s'agissait d'ôter $\frac{3}{7}$ de $\frac{5}{7}$, on dirait; de 5 septièmes ôtez 3 septièmes, reste 2 septièmes, ou $\frac{2}{7}$.

En général, *pour ajouter ou pour soustraire des fractions qui ont le même dénominateur, il suffit de former la somme ou la différence des numérateurs, et d'affecter le résultat du dénominateur commun.* Cette règle n'est pas applicable aux fractions qui ont des dénominateurs différens, parce qu'alors dans chaque fraction l'unité n'étant plus divisée en un même nombre de parties égales, ces parties ne sont plus de même grandeur; on ne peut donc pas les combiner dans cet état; mais comme on le pourrait, si elles avaient le même dénominateur, il faut chercher les moyens de *réduire plusieurs fractions au même dénominateur.* Cette réduction est fondée sur la propriété suivante :

39. *Une fraction ne change pas de valeur, quand on multiplie ou quand on divise ses deux termes par un même nombre.* Pour le démontrer, considérons la fraction $\frac{3}{7}$; si le dénominateur 7 restant le même, on multiplie le numérateur 3, par 2, la fraction $\frac{3}{7}$ deviendra $\frac{6}{7}$, et sera rendue deux fois plus grande, car elle sera composée des mêmes parties de l'unité que la fraction $\frac{3}{7}$, et en contiendra deux fois plus. Si le numérateur 3, de la fraction $\frac{3}{7}$, restant le même, on multiplie le déno-

minateur 7, par 2, elle deviendra $\frac{3}{14}$, et sera rendue deux fois plus petite, car elle contiendra le même nombre de parties que la fraction $\frac{3}{7}$, et chaque partie sera deux fois plus petite, puisque l'unité sera divisée en deux fois plus de parties égales. Cela posé; puisqu'en multipliant le numérateur de la fraction $\frac{3}{7}$, par 2, on la rend deux fois plus grande, tandis qu'on la rend deux fois plus petite en multipliant son dénominateur par 2; lorsqu'on multiplie ses deux termes par 2, elle ne change pas de valeur. Des raisonnemens analogues s'appliqueraient au cas où l'on diviserait les deux termes de la fraction par un même nombre.

La *réduction des fractions au même dénominateur*, ne doit plus offrir aucune difficulté. S'il s'agit, par exemple, des fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, on multipliera les deux termes 2 et 3, de la première, par le dénominateur 7 de la seconde et les deux termes de la seconde, par le dénominateur 3 de la première; ce qui donnera les fractions équivalentes $\frac{14}{21}$ et $\frac{15}{21}$. Si les fractions proposées étaient $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ et $\frac{6}{7}$, on multiplierait successivement les deux termes de chaque fraction, par le produit des dénominateurs des deux autres; ce qui donnerait les fractions équivalentes $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$.

40. En général, *pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur, multipliez successivement les deux termes de chacune, par le produit des dénominateurs différens de toutes les autres. Les nouvelles fractions auront respectivement les mêmes valeurs que les premières* (n° 39), *et leur dénominateur commun sera le produit de tous les dénominateurs différens des fractions primitives.*

41. *Pour multiplier une fraction par un nombre entier, il faut, ou multiplier le numérateur par l'entier, sans changer le dénominateur, ou diviser le dénominateur par l'entier, sans changer le numérateur; et réciproquement, la division d'une fraction par un nombre entier, s'effectue en multipliant le dénominateur, ou en divisant le numérateur par l'entier.* En effet; quand on multiplie le numérateur 5, de la fraction $\frac{5}{12}$ par 2, elle devient $\frac{10}{12}$ et est rendue deux fois plus grande, car on prend deux fois plus des mêmes parties; lorsqu'on divise son dénominateur 12, par 2, elle devient $\frac{5}{6}$, et reçoit une valeur deux fois plus grande, car on prend toujours le même nombre de parties et ces parties deviennent deux fois plus grandes, puisque l'unité est divisée en deux fois moins de parties égales. La division se démontrerait d'une manière analogue; on prouverait que le quotient de $\frac{10}{12}$, par 2, est également exprimé, par $\frac{5}{12}$ et par $\frac{10}{24}$.

42. *Pour multiplier plusieurs fractions entr'elles, il suffit de diviser le produit des numérateurs par celui des dénominateurs; de sorte que la fraction qui exprime le produit, a pour numérateur le produit des numérateurs, et pour dénominateur, le produit des dénominateurs, des fractions proposées.* En effet; soit $\frac{4}{5}$ à multiplier par $\frac{2}{3}$, on dira; si j'avais $\frac{4}{5}$ à multiplier par 2, le produit serait $\frac{4 \times 2}{5}$; or ce n'était pas par 2 que je devais multiplier, mais par un nombre $\frac{2}{3}$, 3 fois plus petit que 2; le produit $\frac{4 \times 2}{5}$ est donc 3 fois trop grand; il faut donc lui restituer sa valeur, en le divisant par 3; ce qui donne $\frac{4 \times 2}{5 \times 3}$, pour le produit de $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$. S'il s'agit du produit des

fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{11}$, il suffira de multiplier par $\frac{7}{11}$, le produit $\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$, des deux premières fractions; le résultat $\frac{2 \times 4 \times 7}{3 \times 5 \times 11}$, sera le produit demandé. Ce qui démontre la règle énoncée.

* 43. *Le produit de plusieurs fractions reste le même, dans quelqu'ordre qu'on effectue les multiplications*, car on est toujours conduit à diviser le produit des numérateurs par celui des dénominateurs, et ces produits ne changent pas dans quelqu'ordre qu'on effectue les multiplications (n° 25).

44. Observons que multiplier plusieurs fractions entr'elles, c'est prendre des *fractions de fractions*. Par exemple, former le produit des fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{11}$, c'est prendre les $\frac{7}{11}$ des $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, car pour effectuer cette multiplication, il faut d'abord multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$; c'est-à-dire prendre 4 fois le cinquième de $\frac{2}{3}$, ou les $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, ce qui donne $\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$; il faut ensuite multiplier ce produit par $\frac{7}{11}$, c'est-à-dire en prendre les $\frac{7}{11}$; ce qui donne $\frac{2 \times 4 \times 7}{3 \times 5 \times 11}$, ou $\frac{56}{165}$. On aura donc réellement pris les $\frac{7}{11}$ des $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$. Donc, *pour obtenir la valeur d'une* FRACTION DE FRACTION, *il suffit de calculer le produit de toutes les fractions ordinaires qui entrent dans son énoncé; le résultat exprime la fraction simple équivalente à la fraction de fraction proposée.* La fraction de fraction exprimée par les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$, a pour valeur le produit $\frac{30}{84}$, des fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$.

45. *Pour diviser par une fraction, il suffit de multiplier le dividende, par la fraction diviseur renversée.* En effet; soit $\frac{5}{7}$ à diviser par $\frac{2}{3}$; s'il s'agissait de diviser $\frac{5}{7}$ par 2, le quotient serait $\frac{5}{7 \times 2}$; mais ce n'est pas par 2 qu'on doit diviser, c'est par une fraction $\frac{2}{3}$, trois fois plus petite que 2; elle sera donc contenue trois fois plus dans le même dividende; le quotient de $\frac{5}{7}$ par $\frac{2}{3}$ est donc 3 fois $\frac{5}{7 \times 2}$ ou $\frac{5 \times 3}{7 \times 2}$ ou $\frac{5}{7} \times \frac{3}{2}$; ce quotient est effectivement le produit du dividende $\frac{5}{7}$, par $\frac{3}{2}$;

qui est la fraction diviseur *renversée;* cela démontre le principe énoncé. On en déduit, que le quotient de $\frac{3}{7}$ par $\frac{5}{7}$, est $\frac{3 \times 7}{7 \times 5}$ ou $\frac{3}{5}$; que celui de $\frac{3}{5}$ par $\frac{3}{7}$ est $\frac{3 \times 7}{5 \times 3}$ ou $\frac{7}{5}$, et que celui de 1 par $\frac{3}{7}$, est $\frac{7}{3}$.

46. En général; *pour diviser l'une par l'autre, deux fractions de même dénominateur, il suffit de diviser le numérateur de la première, par celui de la seconde. Pour diviser deux fractions de même numérateur, il suffit de diviser le dénominateur de la seconde par celui de la première. Enfin, le quotient de l'unité, par une fraction, est égal à cette fraction renversée.* Ainsi, le quotient de $\frac{3}{7}$ par $\frac{4}{7}$ est $\frac{3}{4}$; celui de $\frac{7}{3}$ par $\frac{7}{4}$ est $\frac{4}{3}$, et celui de 1 par $\frac{3}{4}$ est $\frac{4}{3}$.

47. *Tout nombre entier est équivalent à une fraction ordinaire, qui a ce nombre entier pour numérateur et l'unité pour dénominateur.* Ainsi, $2 = \frac{2}{1}$, $3 = \frac{3}{1}$, $10 = \frac{10}{1}$, etc.

48. *Pour extraire les entiers contenus dans une fraction, il suffit d'effectuer la division du numérateur par le dénominateur.* Soit la fraction $\frac{13}{5}$; on divisera 13 par 5, ce qui donnera le quotient 2 et le reste 3. On en conclura que $\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5}$.

49. Les principes précédens comprennent tout le calcul des fractions. *Si l'on avait à opérer sur des fractions jointes à des entiers, on réduirait les entiers en fractions, et l'on n'aurait plus qu'à opérer sur des fractions.* En voici des exemples :

$$2 + \frac{3}{5} = \frac{2}{1} + \frac{3}{5} = \frac{2 \times 5}{1 \times 5} + \frac{3}{5} = \frac{10}{5} + \frac{3}{5} = \frac{13}{5};$$

$$\frac{13}{5} - 2 = \frac{13}{5} - \frac{10}{5} = \frac{3}{5}; \; 2 \times \frac{3}{5} \times 7 = \frac{2}{1} \times \frac{3}{5} \times \frac{7}{1} = \frac{42}{5}$$

$$2 \text{ divisé par } \frac{3}{7} = \frac{2}{1} \times \frac{7}{3} = \frac{14}{3}.$$

50. Cette règle générale est susceptible des simplifications suivantes; 1°. *Dans l'addition des entiers joints à des fractions, on calcule la somme des fractions qui accompagnent les entiers; on extrait les unités qu'elle peut contenir. On joint à cette somme les nombres entiers qui accompagnent les fractions. Le résultat exprime la somme demandée.* Par exemple, pour ajouter $7\frac{15}{9}$ à $3\frac{8}{9}$, on extraira de la somme $\frac{23}{9}$ des fractions, les deux unités qu'elle contient; ce qui donnera $2\frac{5}{9}$; ajoutant à $2\frac{5}{9}$, les entiers 7, 3, le résultat $12\frac{5}{9}$, sera la somme demandée.

2°. *Dans la soustraction des entiers joints à des fractions, on retranche directement la fraction de la fraction, et le nombre entier du nombre entier. Quand la fraction à soustraire est la plus grande, on emprunte une ou plusieurs unités sur le nombre dont on soustrait.* Ainsi, pour ôter $2\frac{3}{7}$, de $8\frac{5}{7}$, on retranchera $\frac{3}{7}$ de $\frac{5}{7}$ et 2 de 8; la réunion des restes partiels $\frac{2}{7}$ et 6, composera le reste total $6\frac{2}{7}$. Pour soustraire $3\frac{4}{7}$, de $6\frac{2}{7}$, on empruntera une des six unités du plus grand nombre; cette unité, qui vaut $\frac{7}{7}$, jointe aux $\frac{2}{7}$ qu'il y avait déjà, donne $\frac{9}{7}$; desquels ôtant $\frac{4}{7}$, il reste $\frac{5}{7}$; or on a emprunté 1 sur le 6; on ôtera donc 3 de 5; ce qui donnera le reste 2. La réunion des restes partiels $\frac{5}{7}$ et 2, composera le reste total $2\frac{5}{7}$.

51. *Les opérations de l'Arithmétique sur les fractions, se vérifient comme pour les nombres entiers* (n° 32), en observant que *dans la preuve de* l'addition, *la première colonne à droite devient celle des fractions.*

52. La difficulté de prendre une idée des grandeurs des frac-
ns dont les termes sont des nombres considérables, conduit
chercher une méthode pour *réduire une fraction à sa plus*
nple expression. Si l'on connaissait le plus grand nombre
i pût diviser à la fois les deux termes d'une fraction; en
'ectuant la division, on obtiendrait une nouvelle fraction
i serait équivalente à la proposée, et qui serait exprimée
r des termes moindres; cette nouvelle fraction serait *irré-*
ctible (*). Ainsi, en divisant les deux termes de la frac-
n $\frac{24}{36}$, par 12, qui est le plus grand nombre qui puisse di-
ser en même tems 24 et 36, on obtient la fraction irré-
ıctible $\frac{2}{3}$.

Lorsque les termes d'une fraction sont de très-grands nom-
es, il est impossible d'apercevoir quel est le plus grand
ombre qui les divise en même tems. La propriété dont jouit
nombre, d'être le plus grand des diviseurs communs aux
eux termes de la fraction, lui a fait donner le nom de
us grand commun diviseur, et la méthode générale que
ous allons donner pour le découvrir, se nomme la *méthode*
u plus grand commun diviseur. Elle repose sur les trois
rincipes suivans :

53. PREMIER PRINCIPE. *Quand plusieurs nombres ont un*
iviseur commun, leur somme a le même diviseur. Cela est
vident; car le quotient de la division de chaque nombre, par
e diviseur commun, étant un nombre entier, la réunion de
es quotiens partiels, qui compose le quotient total de la
omme des nombres proposés par le diviseur commun, est
écessairement un nombre entier. Ainsi, les nombres 6, 12,

(*) *On dit qu'une fraction est* IRRÉDUCTIBLE, *ou réduite à sa plus imple expression, quand elle ne peut être exprimée exactement par des ractions ayant des termes moindres. On démontrera, dans le n° 253, qu'une fraction est irréductible, quand ses deux termes n'ont aucuns facteurs communs.*

15, étant divisibles par 3, leur somme 33 est divisible p
La *réciproque* est fausse, *le diviseur d'une somme, ne d*
pas toujours les parties qui la composent. Par exem
quoique la somme 30, soit divisible par 5, ses partie
et 18 ne le sont pas.

54. SECOND PRINCIPE. *Le diviseur d'un nombre en d*
exactement les multiples, car tout multiple d'un nombre
être considéré comme la somme de plusieurs nombres é
au nombre proposé (n° 53). Ainsi, le nombre 6 étant
sible par 3, ses multiples 12, 18, etc., sont divisibles pa

55. TROISIÈME PRINCIPE. *Lorsqu'une somme est com*
de deux parties; tout nombre qui divise séparément la so
et l'une de ses parties, divise nécessairement l'autre p
En effet; si l'on divise la somme par son diviseur, le qu
sera un nombre entier qui devra être égal à la réunio
quotiens partiels des deux parties, par le même divi
mais, par hypothèse, le premier de ces quotiens pa
est un nombre entier; le deuxième est donc nécessaire
un nombre entier.

56. Ces principes établis, passons à la *recherche du plus g*
commun diviseur et pour fixer les idées, considérons les
nombres 48 et 18. Le plus grand diviseur, commun à
deux nombres, ne saurait surpasser le plus petit des de
car il doit le diviser exactement; on est donc conduit à
sayer si le plus petit nombre 18, qui se divise lui-mêm
donne 1 pour quotient exact, peut aussi diviser le plus g
nombre 48, auquel cas 18 serait le plus grand commun
viseur demandé. Cela n'arrive pas dans notre exemple,
48 divisé par 18, donne 2 au quotient et 12 de *reste.*
a donc :

$$48 = 18 \times 2 + 12 \ldots\ldots \text{(n° 30)}.$$

Cela posé; le plus grand commun diviseur entre 48 et
divise la somme 48, et 18×2, qui est l'une de ses parti
il doit donc diviser l'autre partie, qui est 12; il divise d
18 et 12; il ne peut donc pas être plus grand que le

grand commun diviseur entre 18 et 12; mais ce dernier, divisant 12 et 18 × 2, divisera leur somme 48; il divisera donc 48 et 18; il ne pourra donc pas être plus grand que le plus grand commun diviseur entre 48 et 18. Le plus grand commun diviseur entre 48 et 18, ne pouvant pas être plus grand que celui qui existe entre 18 et 12, et le plus grand commun diviseur entre 18 et 12, ne pouvant pas être plus grand que celui des nombres 48 et 18, ces deux plus grands communs diviseurs ne peuvent pas être plus grands l'un que l'autre; ils sont donc égaux.

57. Les mêmes raisonnemens pouvant s'appliquer à deux nombres quelconques, il est démontré que *le plus grand commun diviseur entre deux nombres, est le même que le plus grand commun diviseur entre le plus petit de ces deux nombres et le reste de la division du plus grand nombre par le plus petit.* Cela posé; le plus grand commun diviseur entre 48 et 18, étant le même que celui des nombres 18 et 12, la difficulté est diminuée, car il ne s'agit plus que de trouver le plus grand commun diviseur entre deux nombres, 18 et 12, respectivement moindres que 48 et 18. Opérant donc sur 18 et 12, comme sur les nombres proposés, on divisera 18 par 12; ce qui donnera 1 au quotient et 6 de reste; or le plus grand commun diviseur entre 48 et 18, est le même que celui des nombres 18 et 12 et ce dernier est le même que le plus grand commun diviseur entre 12 et 6; le plus grand commun diviseur entre 48 et 18, est donc enfin le même que celui des nombres 12 et 6; pour l'obtenir, on divisera 12 par 6, ce qui donnera le quotient exact 2; 6 est donc le plus grand commun diviseur entre 12 et 6; il l'est donc entre les nombres proposés 48 et 18. Et en effet, si l'on divise 48 et 18, par 6, les quotiens, 8 et 3, n'auront plus de facteurs communs.

58. On en déduit cette règle générale : *Pour trouver le plus grand commun diviseur entre deux nombres; divisez le plus grand, par le plus petit; si le reste est zéro, le plus petit nombre sera le diviseur cherché; s'il y a un reste, divisez le*

plus petit des nombres proposés, par ce premier reste; si le reste de cette nouvelle division est zéro, le premier reste sera le diviseur cherché; dans le cas contraire, divisez le premier reste par le deuxième; si le troisième est zéro, le deuxième sera le diviseur cherché, et s'il n'est pas zéro, divisez le deuxième reste par le troisième. Continuant à diviser le reste de chaque division par celui de la suivante, jusqu'à ce que vous parveniez à un quotient exact, le reste qui aura exactement divisé le reste précédent, sera le plus grand commun diviseur demandé. Lorsque ce reste est l'unité, cela indique que les deux nombres proposés n'ont que l'unité pour commun diviseur; on dit alors qu'ils sont *premiers entr'eux.* Un *nombre premier,* est celui qui n'est divisible que par lui-même et par l'unité.

Le plus grand commun diviseur, divise exactement tous les restes des divisions.

Dans l'application de cette règle, on dispose les divisions successives les unes à la suite des autres, en plaçant chaque quotient au-dessus du dividende qui l'a fourni, et effectuant les soustractions, sans écrire les nombres à soustraire. En voici des exemples..

1	2	2	
462	330	132	66
132	66	0	

1	1	8	
17	9	8	1
8	1	0	

Dans la *première opération*, où l'on cherchait le plus grand commun diviseur entre 462 et 330, on a divisé 462 par 330; ce qui a donné 1 au quotient, et 132 de *reste;* on a divisé 330, par le premier reste 132; ce qui a donné 2 au quotient, et 66 pour deuxième reste; la division du premier reste 132, par le deuxième 66, a donné le quotient exact 2; le *reste* 66, qui a divisé exactement le reste précédent 132, est le plus grand commun diviseur entre 462 et 330.

Dans la *seconde opération*, où l'on se proposait de trouver le plus grand commun diviseur entre 17 et 9, on a divisé succes-

sivement, le plus grand nombre par le plus petit, le plus petit par le premier reste 8, et le premier reste par le deuxième reste 1; ce qui a donné 8 pour quotient exact. Le reste, qui divise exactement le reste précédent, étant l'unité, on est certain que les nombres 17 et 9 n'ont pas d'autres diviseurs communs que l'unité; ils sont donc *premiers entr'eux.*

D'après ce qui précède, si l'on veut réduire les fractions, $\frac{18}{48}$, $\frac{330}{462}$, à leurs plus simples expressions, on divisera les deux termes de la première, par leur plus grand commun diviseur 6, et ceux de la seconde, par leur plus grand commun diviseur 66, ce qui donnera $\frac{3}{8}$ et $\frac{5}{7}$, pour les fractions irréductibles équivalentes aux proposées. La fraction $\frac{9}{17}$ est *irréductible*, car il n'existe pas de diviseur commun entre ses deux termes (n° 253).

59. En général : *Pour réduire une fraction à sa plus simple expression, il faut d'abord chercher le plus grand commun diviseur entre ses deux termes* (n° 58). *On divise ensuite les deux termes de la fraction proposée, par leur plus grand commun diviseur; les quotiens expriment le numérateur et le dénominateur de la fraction irréductible équivalente à la proposée.*

60. *Le nombre de divisions à effectuer, pour obtenir le plus grand commun diviseur entre deux nombres, ne peut jamais excéder le plus petit de ces deux nombres*, car chaque reste étant un nombre entier, moindre que le diviseur, les restes diminuent au moins d'une unité à chaque division; de sorte qu'on parviendra au reste zéro, après un nombre de divisions tout au plus égal au plus petit des nombres proposés.

61. La *recherche du plus grand commun diviseur entre plusieurs nombres*, se déduit facilement de ce qui précède. Pour trouver, par exemple, le plus grand commun diviseur des trois nombres 48, 18 et 15, on dira : le diviseur cherché doit diviser

les deux premiers nombres ; il ne peut donc pas être plus grand que leur plus grand commun diviseur 6 ; les facteurs communs aux trois nombres proposés, le sont donc nécessairement entre 6 et 15 ; mais le seul facteur commun entre 6 et 15, est 3 ; le plus grand commun diviseur demandé est donc 3 ; et en effet, si l'on divise 48, 18 et 15, par 3, les quotiens 16, 6, 5, n'auront plus de facteurs communs. On peut d'ailleurs démontrer directement que 3 est le plus grand commun diviseur des trois nombres 48, 18 et 15. En effet ; le plus grand commun diviseur 6, entre 48 et 18, renfermant tous les facteurs communs de ces deux nombres, le nombre 3, qui contient tous les facteurs communs entre 6 et 15, renferme tous les facteurs communs des nombres 48, 18 et 15 ; il est donc leur plus grand commun diviseur. On voit que le plus grand commun diviseur entre trois nombres est celui qui existe entre un des nombres, et le plus grand commun diviseur des deux autres. On prouverait de même que le plus grand commun diviseur entre quatre nombres, est celui qui existe entre un des nombres et le plus grand commun diviseur des trois autres, et qu'en général, *pour obtenir le plus grand commun diviseur entre plusieurs nombres, il suffit de chercher successivement le plus grand commun diviseur, entre le premier nombre et le deuxième, entre le commun diviseur qui en résulte et le troisième nombre, entre ce nouveau diviseur commun et le quatrième nombre, et ainsi de suite, jusqu'au dernier des nombres proposés. Le plus grand commun diviseur, obtenu dans la dernière opération, est celui des nombres proposés.* S'il s'agit, par exemple, des nombres 15015, 2310, 3570, 15470, on cherchera d'abord le plus grand commun diviseur 1155 des deux premiers nombres ; le plus grand commun diviseur entre 1155 et 3570, sera 105 ; enfin, le plus grand commun diviseur entre 105 et 15470, étant 35, on en conclura que le plus grand commun diviseur des quatre nombres proposés, est 35.

* 62. Je terminerai la théorie des fractions, en démontrant un principe qui peut servir à simplifier la division. *Pour diviser un nombre par un produit, il suffit de diviser successivement ce nombre par les facteurs du*

produit, et réciproquement. Par exemple, diviser 48, par le produit 12 des facteurs 3 et 4, revient à diviser 48 par 3 et à diviser le quotient 16 par 4; car le quotient de la division de 48 par 3.4 est exprimé par la fraction $\frac{48}{3.4}$, et cette fraction est égale à $\frac{48}{3}$ divisé par 4. Réciproquement, diviser 48, par les facteurs 3 et 4, revient à diviser 48, par le produit 3×4, car 48 divisé par 3, donne $\frac{48}{3}$ et $\frac{48}{3}$ divisé par 4, donne $\frac{48}{3 \times 4}$. Cette démonstration peut s'étendre à un nombre quelconque de facteurs.

Théorie des Décimales (n° 63).

63. La simplicité du calcul des nombres entiers, comparée à la complication du calcul des fractions, suffit pour faire apercevoir combien il serait utile d'assujétir les subdivisions de l'unité à une loi de décroissement uniforme; car on sent que c'est de cette uniformité que dépend la facilité des opérations de l'Arithmétique sur les nombres entiers. On y est parvenu, en adoptant la subdivision de l'unité principale, en parties de dix en dix fois plus petites, que l'on nomme à cause de cela *fractions décimales*, ou *unités décimales*, ou *décimales*. Ce mode de décroissement était celui qu'indiquait la nature de notre système de numération.

64. *Le système des décimales n'est qu'une extension du système adopté pour les nombres entiers; on a conçu la série des différens ordres d'unités, continuée de part et d'autre de l'unité principale.* Par exemple, comme en avançant successivement d'un rang vers la droite d'un nombre, on passe des *centaines*, aux dixièmes de centaines ou *dixaines*; des dixaines, aux dixièmes de dixaines ou *unités*; il est naturel de passer des unités aux dixièmes d'unités ou *dixièmes*; de ceux-ci aux dixièmes de dixièmes ou *centièmes*; de ces derniers aux dixièmes de centièmes ou *millièmes*; et ainsi de suite.

65. Le système de numération fournit, pour *écrire les fractions décimales*, une méthode analogue à celle qui a été exposée pour les nombres entiers, car un chiffre mis à la droite d'un autre, exprimant des unités dix fois plus petites (n° 8), *le*

premier chiffre, à droite des unités, exprimera des dixièmes; le second des centièmes, le troisième des millièmes; et ainsi de suite. On a distingué le chiffre des unités simples, en mettant une *virgule* de cette forme, sur la droite de ce chiffre. D'après cette convention,

$$4{,}7 = 4 + \frac{7}{10} = \frac{47}{10};\ 0{,}07 = \frac{7}{100};\ 0{,}0101 = \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} = \frac{101}{10000};$$
$$0{,}0405 = \frac{4}{100} + \frac{5}{10000} = \frac{400}{10000} + \frac{5}{10000} = \frac{405}{10000}.$$

Si l'on compare les *nombres décimaux* (*),

$$4{,}7,\ 0{,}07,\ 0{,}0101,\ 0{,}0405,$$

avec les *fractions décimales* équivalentes

$$\frac{47}{10},\ \frac{7}{100},\ \frac{101}{10000},\ \frac{405}{10000},$$

on en déduira ces deux règles générales (nos 66 et 67):

66. *Tout nombre décimal est équivalent à une fraction, dont le numérateur est le nombre décimal, abstraction faite de la virgule et dont le dénominateur est l'unité suivie d'autant de zéros vers la droite, qu'il y avait de chiffres sur la droite de la virgule.* Ainsi, le nombre décimal 0,0465 est équivalent à la fraction $\frac{465}{10000}$, car on a

$$0{,}0465 = \frac{4}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{5}{10000} = \frac{400}{10000} + \frac{60}{10000} + \frac{5}{10000} = \frac{465}{10000}.$$

67. Réciproquement : *Pour convertir en décimales une frac-*

(*) Les *nombres décimaux* sont ceux qui renferment des dixièmes, des centièmes, etc., de l'unité principale. *Les nombres entiers peuvent être considérés comme des nombres décimaux, car il suffit pour cela de mettre la virgule décimale sur la droite du chiffre des unités.* Les chiffres placés sur la droite de la virgule, se nomment des *décimales*. Ainsi, 64,127 contient trois *décimales*; 1, 2, 7 sont des *décimales* ou des *chiffres décimaux*; la *partie entière* est 64, et la *partie décimale* est 127. Les *fractions décimales* sont celles qui ont pour dénominateur l'un des nombres 10, 100, 1000, 10000, 100000, etc.

ion dont le dénominateur est l'unité suivie de plusieurs zéros vers la droite, il suffit d'écrire le numérateur et de séparer autant de décimales sur sa droite, qu'il y avait de zéros dans le dénominateur. Quand le numérateur ne renferme pas le nombre de chiffres nécessaire au placement de la virgule, on y supplée en mettant des zéros sur sa gauche. Par exemple, le dénominateur de la fraction décimale $\frac{405}{10000}$ contenant quatre zéros, la règle prescrit de séparer quatre décimales sur la droite du numérateur 405; on écrira donc 00405, et séparant les quatre décimales, on obtiendra 0,0405, pour le nombre décimal équivalent à la fraction proposée. Et en effet, on a

$$\frac{405}{10000} = \frac{400}{10000} + \frac{5}{10000} = \frac{4}{100} + \frac{5}{10000} = 0{,}0405.$$

68. *Pour écrire un nombre décimal énoncé, il suffit de placer successivement au rang des dixièmes, à celui des centièmes, etc., le chiffre qui désigne le nombre des dixièmes, celui qui désigne le nombre des centièmes, etc., que contient le nombre proposé. Quand ce nombre renferme des unités entières, on les écrit sur la gauche de la virgule. Lorsque le nombre proposé manque d'unités d'un certain ordre, on met un zéro pour tenir leur place et conserver aux autres chiffres le rang qui leur convient.* Ainsi, la fraction décimale, *quatre cent cinq, dix-millièmes*, s'écrira 0,0405, car $\frac{405}{10000} = \frac{4}{100} + \frac{5}{10000}$.

69. Réciproquement : *Pour énoncer un nombre décimal, on distinguera deux cas; 1°. si l'on veut confondre l'énoncé de la partie entière avec celui de la partie décimale; il suffira, après avoir énoncé le nombre, abstraction faite de la virgule, d'ajouter le nom de l'espèce d'unités décimales que représente le dernier chiffre à droite; ce nom s'obtiendra en comptant sur chaque chiffre décimal, à partir de la virgule, les mots, dixième, centième, millième, etc.; 2°. si l'on veut séparer l'énoncé de la partie entière, de celui de la partie décimale,*

on énoncera d'abord le nombre entier comme s'il était seul, puis la partie décimale, en procédant comme dans le premier cas. En appliquant cette règle au nombre 17,027, on verra qu'il peut s'énoncer des deux manières suivantes ; *dix-sept mille vingt-sept, millièmes, et dix-sept unités, vingt-sept millièmes.* Cela est évident, car $17{,}027 = \frac{17027}{1000} = 17 + \frac{27}{1000}$.

70. Les règles des n°s 66 et 67, donnant le moyen de convertir les nombres décimaux en fractions, et réciproquement, on pourrait ramener le calcul des nombres décimaux à celui des fractions. Mais, on prévoit que *le calcul des nombres décimaux doit être aussi simple que celui des nombres entiers*, car les unités de tous ces nombres sont soumises à la même loi. D'après cette remarque, on ne transformera les nombres décimaux en fractions ordinaires, que lorsque cela sera nécessaire pour découvrir les règles à l'aide desquelles on parvient au résultat, en opérant directement sur les nombres décimaux proposés.

Les méthodes que nous avons données pour l'*addition* et la *soustraction* des nombres entiers, sont fondées sur ce qu'en allant de droite à gauche, dix unités d'un ordre quelconque en valent une de l'ordre suivant; mais les unités décimales sont soumises à la même loi, on peut donc leur appliquer la même règle. Ainsi :

Pour ADDITIONNER *plusieurs nombres décimaux, il faut les placer les uns sous les autres, en ayant soin que les unités du même ordre se trouvent dans une même colonne verticale. On effectue alors l'addition, en faisant abstraction de la virgule* (n° 14) *et dans la somme, on place la virgule sur la droite du chiffre qui doit exprimer des unités simples.*

Pour SOUSTRAIRE *deux nombres décimaux l'un de l'autre, écrivez sur la droite d'un des nombres, assez de zéros pour qu'il se trouve autant de décimales dans un nombre que dans l'autre. Effectuez ensuite le calcul comme s'il n'y avait pas de virgule et placez la virgule sur la droite du chiffre qui doit*

exprimer des unités. Dans la pratique, on se dispense d'écrire des zéros sur la droite du nombre qui contient le moins de décimales, mais on opère comme s'ils y étaient, en ayant soin de placer les unités sous les unités, les dixièmes, sous les dixièmes, etc. Les Elèves peuvent appliquer ces deux règles aux exemples suivans :

Additions....	97,876	9,87	3705,2	9000,40070012
	45,121	45,6	89,7501	8210,5673
Sommes.....	142,997	55,47	3794,9501	17210,96800012
Soustractions.	de.... 142,997		100,21	17210,96800012
	ôtez... 97,876		47,873	9000,40070012
	Restes... 45,121		52,337	8210,5673

71. *Lorsqu'on avance la virgule de un, de deux, de trois, e, etc., rangs vers la droite ou vers la gauche, d'un nombre écimal, ce nombre devient, dix, cent, mille, etc., fois plus rand ou plus petit*, car chaque chiffre avançant de un, de deux, e trois, de, etc., rangs, vers la gauche ou vers la droite, exprime es unités, dix, cent, mille, etc., fois plus grandes ou plus petes qu'auparavant. Par exemple, si l'on avance la virgule de eux rangs vers la droite du nombre 3,456, on aura 345,6; haque chiffre étant avancé de deux rangs à gauche, exprimera es unités cent fois plus grandes qu'auparavant. Le 3 qui exprimait des unités, vaudra des centaines; le 4, qui désignait des ixièmes, exprimera des dixaines, c'est-à-dire des unités cent ois plus grandes; et ainsi de suite. Chaque partie du nombre ,456 devient donc cent fois plus grande, lorsqu'on avance la irgule de deux rangs vers la droite; ce nombre devient donc ent fois plus grand. On verrait de même qu'en avançant la irgule de deux rangs vers la gauche du nombre 345,6, ce ombre devient cent fois plus petit.

72. *Pour multiplier ou pour diviser un nombre décimal, par 'unité suivie de plusieurs zéros vers la droite, il suffit d'avancer a virgule d'autant de rangs, vers la droite du multiplicande u vers la gauche du dividende, qu'il y a de zéros sur la droite*

de l'unité, dans le nombre qui sert de multiplicateur ou de diviseur. S'il n'y avait pas assez de chiffres pour effectuer le déplacement de la virgule, on y suppléerait en mettant des zéros sur la droite du multiplicande, ou sur la gauche du dividende. Cette règle est une conséquence du principe du n° 71. S'il s'agit de multiplier 3,7 par 1000, comme on doit avancer la virgule de trois rangs à droite, on placera deux zéros sur la droite du multiplicande; ce qui donnera 3,700; avançant la virgule de trois rangs vers la droite, ce qui revient à la supprimer, le résultat 3700, sera le produit demandé. Pour diviser 3,7 par 1000, on substituera au dividende, le nombre équivalent 0003,7, et avançant la virgule de trois rangs à gauche, le résultat 0,0037 sera le quotient demandé. On voit que *la multiplication et la division d'un nombre décimal, par l'unité suivie de plusieurs zéros, s'effectuent à l'aide du seul déplacement de la virgule.*

73. Le principe du n° 72, conduit à la démonstration générale des règles des n°s 66 et 67. En effet; 1°. lorsqu'on supprime la virgule dans un nombre décimal, on avance la virgule d'autant de rangs vers la droite qu'il y avait de décimales; on multiplie donc le nombre décimal par l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y avait de décimales; on doit donc diviser le résultat par l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y avait de décimales dans le nombre proposé. Ce qui démontre la règle du n° 66. Par exemple, lorsqu'on supprime la virgule dans le nombre 0,0465, le résultat 465 est 10000 fois trop grand; le nombre 0,0465 est donc équivalent à $\frac{465}{10000}$.

2°. Lorsque le dénominateur d'une fraction est l'unité suivie de plusieurs zéros, on effectue la division du numérateur par le dénominateur, en séparant autant de décimales sur la droite du numérateur qu'il y avait de zéros dans le dénominateur. Ce qui démontre la règle du n° 67. Ainsi, la fraction décimale $\frac{465}{10000}$, étant équivalente au quotient de la division de

465 par 10000, on obtiendra la valeur de cette fraction en avançant la virgule de quatre rangs vers la gauche du chiffre 5 des unités ; ce qui donnera, 0,0465.

74. *Pour multiplier entr'eux plusieurs nombres décimaux ; effectuez la multiplication comme s'il n'y avait pas de virgule et séparez ensuite, sur la droite du produit, autant de décimales qu'il s'en trouve dans tous les facteurs réunis.* (*Quand le produit ne contiendra pas plus de chiffres qu'il n'y a de décimales dans tous les facteurs réunis, on y suppléera en mettant des zéros sur sa gauche.*) Démontrons cette règle. Soit proposé de multiplier 3,64 par 1,2 ; on convertira d'abord chaque facteur en fraction ordinaire ; ce qui réduira la question à multiplier $\frac{364}{100}$ par $\frac{12}{10}$; le résultat $\frac{4368}{1000}$, converti en décimales, donnera 4,368, pour le produit de 3,64 par 1,2. On voit qu'il a suffi de multiplier 364 par 12 (ce qui revient à faire abstraction de la virgule dans chaque facteur), et de séparer sur la droite du produit 4368, les trois décimales contenues dans les deux facteurs réunis. Des raisonnemens analogues s'appliqueraient à tout autre exemple. En effet ; chaque facteur est équivalent à une fraction dont le numérateur est ce facteur dans lequel on fait abstraction de la virgule et dont le dénominateur est l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y avait de chiffres décimaux dans ce facteur. Le produit demandé est donc équivalent à une fraction ordinaire dont le numérateur est le produit de tous les nombres entiers qui résultent de la suppression de la virgule dans les facteurs proposés, et dont le dénominateur est l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y avait de décimales dans tous les facteurs réunis. Or, pour convertir cette fraction produit, en décimales, il suffit d'écrire son numérateur en séparant autant de chiffres décimaux sur sa droite qu'il y a de zéros dans le dénominateur. La règle énoncée est donc démontrée généralement. Ainsi, pour multiplier 345,729 par 2,27, on formera le produit 78480483, de 345729 par 227; séparant cinq décimales sur la droite de ce produit, à cause

des cinq chiffres décimaux contenus dans les deux facteurs, le résultat 784,80483 sera le produit cherché. Le produit de 345,729 par 227, serait 78480,483. Le produit des nombres 1,2, 0,3, 4,5, sera 1,620 ou 1,62.

75. *Les nombres décimaux jouissent, comme les nombres entiers, de cette propriété importante que le produit de plusieurs facteurs ne change pas dans quelqu'ordre qu'on effectue la multiplication.* Cela résulte de la règle du n° 74. On pourrait aussi démontrer ce principe en observant que le produit des nombres décimaux est le même que celui des fractions équivalentes, qui ne change pas dans quelqu'ordre qu'on effectue la multiplication (n° 43).

76. *Pour diviser deux nombres décimaux l'un par l'autre; mettez d'abord sur la droite du nombre qui contient le moins de décimales, assez de zéros pour que le nombre des chiffres décimaux soit le même dans le dividende et dans le diviseur. Effectuez alors la division en faisant abstraction de la virgule. Le résultat exprimera le quotient demandé.* S'il s'agit de diviser 6,8 par 0,034; comme le diviseur contient deux décimales de plus que le dividende, on mettra deux zéros sur la droite de ce dernier; ce qui n'en altèrera pas la valeur; la question sera réduite à diviser 6,800 par 0,034; le nombre des décimales étant le même, dans le dividende et dans le diviseur, on peut faire abstraction de la virgule, sans changer le quotient, car 6,800 et 0,034 sont équivalens aux fractions ordinaires $\frac{6800}{1000}$, $\frac{34}{1000}$, et pour diviser ces fractions de même dénominateur, il suffit de diviser le numérateur 6800 de la première, par le numérateur 34 de la seconde, (n° 46); le quotient demandé est donc $\frac{6800}{34}$ ou 200.

En général, lorsque le dividende et le diviseur renferment le même nombre de décimales, en substituant les fractions ordinaires équivalentes, on est conduit à diviser l'une par l'autre, deux fractions de même dénominateur, ce qui se ré-

duit à diviser le numérateur de la première fraction par celui de la seconde. Mais, ces numérateurs sont les nombres décimaux abstraction faite de la virgule. On est donc conduit à la règle énoncée.

Remarque. On pourrait effectuer la division, sans préparer le dividende et le diviseur, car il suffirait d'opérer sur les fractions équivalentes, mais le calcul serait moins simple, et d'ailleurs le but que l'on se propose est d'éviter la transformation des nombres décimaux en fractions ordinaires. Ainsi, pour diviser 6,8 par 0,034, il suffirait d'opérer sur les fractions équivalentes $\frac{68}{10}$, $\frac{34}{1000}$; le quotient serait $\frac{68}{10} \times \frac{1000}{34}$, ou $\frac{68000}{340}$, ou 200.

77. *Pour soumettre au calcul, des nombres décimaux, combinés avec des nombres entiers et avec des fractions, on convertira les nombres décimaux en fractions* (n° 66); *on n'aura plus alors qu'à opérer sur des nombres entiers, combinés avec des fractions; ce qui s'exécutera sans difficulté. Les opérations de l'Arithmétique sur les nombres décimaux, se vérifient d'après les règles données pour les nombres entiers* (n° 32). Si l'on veut opérer sur les nombres 3,7 et $2\frac{3}{4}$, on les mettra sous forme fractionnaire, ce qui donnera $\frac{37}{10}$ et $\frac{11}{4}$; ajoutant, retranchant, multipliant et divisant ces deux fractions, les résultats $\frac{258}{40}$, $\frac{38}{40}$, $\frac{407}{40}$, $\frac{148}{110}$, exprimeront respectivement, la somme, la différence, le produit et le quotient, des nombres donnés.

78. La *réduction d'une fraction ordinaire en décimales*, présente trois cas que nous allons successivement examiner.

1er Cas. *Quand le dénominateur est l'unité suivie de plusieurs zéros vers la droite, la règle du* n° 67, *donne l'expression décimale de la fraction proposée.* Ainsi, les fractions $\frac{367}{100}$, $\frac{45}{1000}$, ont pour expressions décimales 3,67 et 0,045.

). 2e CAS. *Lorsque le dénominateur ne contient que les facteurs 2 et 5; la division du numérateur par le dénominateur, conduit à un quotient décimal exact*, car en multipliant les deux termes de la fraction un certain nombre de fois par 2 ou par 5, de manière que les facteurs 2 et 5 entrent le même nombre de fois dans le nouveau dénominateur, on la transformera en une fraction équivalente, dont le dénominateur sera l'unité suivie de plusieurs zéros vers la droite, et une telle fraction se réduit toujours exactement en décimales (n° 67).

La fraction $\frac{7}{40}$ est de cette espèce, car on a

$$\frac{7}{40}=\frac{7}{2.2.2.5}=\frac{7\times 5.5}{2.2.2.5\times 5.5}=\frac{7.5.5}{10.10.10}=\frac{175}{1000}=0{,}175.$$

La division de 7 par 40, conduit au même résultat. Voici le calcul.....

	7	40
Dixièmes.....	70	0,175.
Centièmes.....	300	
Millièmes.....	200	
Reste.....	0	

Pour effectuer cette division, on observera d'abord que, comme on se propose d'obtenir au quotient, des dixièmes, des centièmes, etc., on doit convertir les dividendes partiels en dixièmes, en centièmes, etc. Cela posé; la division de 7 par 40, ne donnant pas d'unités au quotient, on mettra un zéro à leur place; on convertira ensuite le dividende 7, en 70 dixièmes, et l'on aura 70 dixièmes à diviser par 40; ce qui donnera 1 dixième au quotient et 30 dixièmes de *reste;* on écrira donc 1 au rang des dixièmes du résultat et pour continuer la division, on convertira le *reste* 30 dixièmes, en 300 centièmes; la division de 300 centièmes, par 40, donnera 7 centièmes au quotient et 20 centièmes de *reste;* on écrira donc 7 au rang des centièmes du résultat. Enfin, le *reste* 20 centièmes, converti en 200 millièmes et divisé par 40, donnera le quotient exact 5 millièmes; on écrira donc 5 au

ng des millièmes du résultat. La division est alors terminée, l'on a 0,175, pour la valeur exacte du quotient de 7 par 40, de la fraction $\frac{7}{40}$. L'exactitude de ce résultat est facile à rifier, car la fraction décimale 0,175 est équivalente à la ıction ordinaire $\frac{175}{1000}$, qui se réduit à $\frac{7}{40}$ (n° 59).

80. En général, *pour réduire en décimales, une fraction ordinaire, plus grande ou plus petite que l'unité; il faut diviser n numérateur par son dénominateur, en ayant soin, lorsqu'on a obtenu les unités du quotient, de mettre une virgule r leur droite, et de convertir les restes successifs en dixièmes, centièmes, en millièmes, etc.* (*Ces conversions s'effectuent mettant un zéro sur la droite de chaque reste*). *Les chiffres l'on obtient à la suite des unités du quotient, expriment les ixièmes, les centièmes, les millièmes, etc., du nombre décimal qui est équivalent à la fraction proposée.* Si l'on applique ette règle aux fractions $\frac{37}{64}$, $\frac{53}{625}$, on trouvera que leurs vaeurs en décimales, sont 0,578125 et 0,0848.

81. *Lorsqu'après avoir réduit une fraction à sa plus simple expression, le dénominateur ne renferme que les facteurs 2 et 5, il est facile de déterminer combien on obtiendrait de chiffres décimaux au quotient, si l'on effectuait la division du numérateur par le dénominateur.* En effet; soit la fraction $\frac{7}{40}$; le quotient que l'on cherche devant être des dixièmes, ou des centièmes, ou etc., on doit convertir le dividende 7, en dixièmes ou en centièmes, ou etc., en multipliant 7 par 10, ou par 10×10, ou etc. Mais, la division de l'un de ces produits, par 40, ne pourra s'effectuer exactement que lorsque ce produit contiendra tous les facteurs 2, 2, 2, 5, de 40. Il faudra donc multiplier 7 par $10 \times 10 \times 10$, afin d'introduire trois fois le facteur 2, ce qui conduira à diviser 7000 millièmes par 40; le quotient exact sera 175 millièmes. Ainsi, le déno-

minateur 40, contenant *trois fois* le facteur 2 et une seule fois le facteur 5, le quotient de la division de 7 par 40, contiendra *trois chiffres décimaux*. On verrait de même que le quotient de la division de 17 par 2500, doit contenir *quatre chiffres décimaux*, parce que le dénominateur 2500 étant égal $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2$, on doit *introduire quatre fois le facteur* 5, dans le dividende 17. Et en effet, la fraction $\frac{17}{2500}$, réduite en décimales (n° 80), devient 0,0068.

82. 3e CAS. *Quand le dénominateur d'une fraction irréductible contient d'autres facteurs que 2 et 5, la fraction ne peut pas se réduire exactement en décimales.* En effet; les deux termes de la proposée n'ayant aucuns facteurs communs, les facteurs, autres que 2 et 5, qui entrent dans le dénominateur, y resteront toujours, quand on multipliera les deux termes par un même nombre; on ne pourra donc pas transformer la fraction donnée en une fraction décimale ayant pour dénominateur l'unité suivie de plusieurs zéros vers la droite (*). La proposée ne se réduira donc pas exactement en décimales, car tout nombre décimal est équivalent à une fraction ordinaire, dont le dénominateur est l'unité suivie de plusieurs zéros vers la droite. La fraction $\frac{3}{11}$ est de cette espèce, la division de 3 par 11, donne le quotient indéfini 0,27 27 27 etc. Voici le calcul :

1er dividende.....	3 unités.	11 diviseur.	
2e dividende.....	30 dixièmes.	1er quotient partiel...	0 unités.
3e.....	80 centièm.	2e.....	2 dixièmes.
4e.....	30 milliém.	3e.....	7 centièmes.
5e.....	80 dix-mill.	4e	2 millièmes.
6e.....	30 cent-mil.	5e	7 dix-mill.
etc.....	etc.	etc.....	etc.
		Quotient total.....	0,272727 etc.

(*) Cette démonstration ne sera complètement rigoureuse que lorsqu'on aura établi le principe du n° 208.

Le dividende 3 étant plus petit que le diviseur 11, le quotient est moindre que l'unité ; on posera donc un zéro, qui tiendra la place des unités du quotient ; pour obtenir les chiffres décimaux, on convertira le dividende 3 unités, en 30 dixièmes ; ce deuxième dividende partiel, divisé par 11, donnera le second quotient partiel 2 dixièmes, avec le *reste* 8 dixièmes ; ce reste, converti en 80 centièmes et divisé par 11, donnera 7 centièmes au quotient et 3 centièmes de reste ; la conversion de ce reste en millièmes, donnera 30 millièmes pour quatrième dividende partiel. La comparaison de ce quatrième dividende partiel avec le second, offre une circonstance remarquable ; on voit que *les chiffres 2 et 7 obtenus au quotient, doivent se reproduire à l'infini et dans le même ordre.* En effet ; le second dividende partiel 30 dixièmes, ayant donné 27 centièmes au quotient avec le reste 30 millièmes, le quatrième dividende partiel 30 millièmes, qui est cent fois plus petit que le second, donnera un quotient cent fois plus petit, 27 dix-millièmes, avec le reste cent fois plus petit, 30 cent-millièmes, et ainsi de suite ; ce qui conduira au quotient indéfini $0,272727$ etc.

83. Observons que *plus on mettra de chiffres décimaux au quotient, plus on approchera de la valeur exacte de la fraction* $\frac{3}{11}$. En effet ; les restes alternatifs 8, 3, diminuent très-rapidement de valeur, car ils représentent successivement des dixièmes, des centièmes, etc. ; et comme il faut les diviser par le diviseur 11, pour avoir ce qui manque au quotient obtenu pour être exact, on pourra toujours prendre assez de chiffres décimaux au quotient, pour que la valeur de la fraction décimale qui en résultera, diffère d'aussi peu que l'on voudra de la fraction $\frac{3}{11}$.

La règle du n° 80 donnera

$$\frac{7}{9} = 0,7777 \text{ etc.} ; \frac{4}{13} = 0,307692\ 307692 \text{ etc.}$$

$$\frac{12194}{99000} = 0,123\ 17\ 17 \text{ etc.} ; \frac{33875}{990} = 34,2\ 17\ 17\ 17 \text{ etc.}$$

$$\frac{13665}{999000} = 0,0013\ 678\ 678 \text{ etc.}$$

84. Les fractions décimales, telles que 0,272727 etc., dans lesquelles plusieurs chiffres se répètent *périodiquement*, dans le même ordre et à l'infini, ont reçu le nom de *fractions décimales périodiques*, et la partie du quotient qui se reproduit périodiquement, s'appelle la *période*. Lorsque la période ne commence qu'après un certain nombre de décimales, la fraction est dite *fraction décimale périodique mixte*; ainsi l'expression 0,1231717 etc., est une *fraction décimale périodique mixte*, dont la période est 17.

85. Les trois cas que nous venons d'examiner, donnant le moyen de réduire les fractions ordinaires en décimales, d'une manière exacte ou approchée, passons à la solution du problème inverse, qui consiste à *convertir les nombres décimaux en fractions ordinaires*.

Lorsque le nombre proposé ne renferme pas une infinité de décimales, sa conversion en fraction ordinaire s'exécute d'après la règle du n° 66.

Quand ce nombre renferme une infinité de chiffres décimaux, on ne peut l'évaluer exactement que lorsqu'il est périodique. Nous n'avons donc plus qu'à nous occuper des fractions décimales périodiques et des fractions décimales périodiques mixtes.

Pour fixer les idées, nous considérerons la fraction décimale périodique 0,272727 etc.; si l'on pouvait en déduire une autre expression, composée de la même partie périodique, la différence entre ces deux expressions serait facile à évaluer, car elle ne renfermerait plus qu'un nombre fini de chiffres. On peut y parvenir de plusieurs manières; voici la plus simple :

De 100 fois 0,27 27 27 etc.,	ou	27,27 27 etc.,
Otant une fois 0,27 27 27 etc.,	ou	0,27 27 etc.,
Il reste, 99 fois 0,27 27 27 etc.,	ou	27.

Puisque 27, vaut 99 fois la proposée, cette proposée est égale à la 99e partie de 27, qui est $\frac{27}{99}$. On voit que la fraction pério-

dique proposée 0,272727 etc., est exprimée par une fraction ordinaire $\frac{27}{99}$, dont le numérateur est la période 27 et dont le dénominateur 99 est composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période. Comme les mêmes raisonnemens s'appliqueraient à tout autre exemple, et conduiraient à des résultats de même forme, nous établirons cette règle générale :

86. *Toute fraction décimale* PÉRIODIQUE, *moindre que l'unité, dont la période commence au premier chiffre décimal, est exprimée par une fraction ordinaire, qui a pour numérateur la période et pour dénominateur un nombre composé d'autant de* 9, *qu'il y a de chiffres dans la période.* En appliquant cette règle aux fractions décimales périodiques 0,777 etc., 0,307692 307692 etc., dont les périodes respectives sont 7 et 307692, on trouvera qu'elles sont exprimées par les fractions ordinaires $\frac{7}{9}$, $\frac{307692}{999999}$; la seconde se réduit à $\frac{4}{13}$.

REMARQUE. *Si la fraction décimale périodique surpassait l'unité, on ajouterait au nombre entier placé sur la gauche de la virgule, la fraction ordinaire équivalente à la partie périodique; le résultat serait le nombre fractionnaire équivalent à la proposée.* Par exemple,

$$2{,}27\ 27\ 27 \text{ etc.} = 2 + 0{,}27\ 27 \text{ etc.} = 2 + \frac{27}{99} = \frac{225}{99}.$$

87. *La conversion d'une fraction décimale périodique* MIXTE, *en fraction ordinaire, se déduit de ce qui précède; il suffit de transporter la virgule sur la gauche de la première période.* Ainsi, pour évaluer 0,123 17 17 17 etc., on avancera la virgule de trois rangs vers la droite, ce qui revient à multiplier par 1000 (n° 72); le résultat 123, 17 17 17 etc., est égal à 123 unités plus 0, 17 17 etc., ou à 123 plus $\frac{17}{99}$, ou à $\frac{12194}{99}$; la proposée, qui est 1000 fois plus petite, a donc pour valeur $\frac{12194}{99000}$; et en effet la division, de 12194 par 99000, donne 0, 123 17 17 17 etc

Remarque. Pour simplifier le calcul, on placera successivement la virgule sur la droite et sur la gauche de la première période, ce qui donnera deux nombres dans lesquels la partie périodique sera la même; prenant la différence entre ces deux nombres, la partie périodique disparaîtra; de sorte qu'il sera facile d'en déduire la valeur de la fraction proposée. En effet; si l'on désigne cette fraction par x, on aura

$$100000\,x = 123{,}17\,17\,17\,17\,17 \text{ etc.}$$
$$1000\,x = 123{,}\,17\,17\,17\,17 \text{ etc.}$$

Retranchant $1000\,x$, de $100000\,x$, il restera

$$99000\,x = 12317 - 123. \text{ D'où}$$
$$x = \frac{12317 - 123}{99000} = \frac{12194}{99000}.$$

88. L'inspection de la valeur de x, conduit à cette règle générale : *Pour convertir une fraction décimale périodique en fraction ordinaire; faites abstraction de la virgule. Du dernier nombre, supprimez tous les chiffres qui se trouvent à la droite de la première période et supprimez ensuite toutes les périodes; la différence entre ces deux derniers nombres, sera le numérateur de la fraction demandée. Pour dénominateur, prenez un nombre composé d'autant de* 9 *qu'il y a de chiffres dans la période et mettez autant de zéros sur la droite de ce nombre qu'il y a de chiffres entre la virgule et la première période.* On en déduit....

$$3{,}12\,17\,17\,17 \text{ etc.} = \frac{3{,}217 - 3{,}2}{990} = \frac{33875}{990}.$$
$$0{,}0013\,678\,678 \text{ etc.} = \frac{13678 - 13}{9990000} = \frac{13665}{9990000}.$$

* *Remarque.* Lorsqu'on applique la règle du nº 86, à la fraction décimale périodique 0,999 etc., dont la période est 9, on trouve que sa valeur est $\frac{9}{9}$, ou 1. Si l'on veut concevoir comment la fraction 0,9999 etc., prolongée à l'infini, est rigoureusement égale à l'unité; on observera que plus on prend de décimales, plus on approche de l'unité, car les erreurs que l'on commettrait en prenant....

0,9 ou 0,99 ou 0,999 ou 0,9999 ou etc.,

au lieu de l'unité, sont

0,1 ou 0,01 ou 0,001 ou 0,0001 ou etc.

Ces erreurs diminuent très-rapidement, et quand la fraction 0,9999 etc., se prolonge à l'infini, elle est rigoureusement égale à l'unité.

La fraction périodique $0,9999$ etc., étant égale à l'unité, si l'on divise successivement cette fraction par les nombres 10, 100, 1000 etc., les quotiens $0,0999$ etc., $0,00999$ etc., $0,000999$, etc., auront pour valeurs $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, etc. On a donc....

$0,9999$ etc. $= 1$; $0,0999$ etc. $= \frac{1}{10} = 0,1$; $0,00999$ etc. $= \frac{1}{100} = 0,01$; etc.

$9,7999$ etc. $= 9,7 + 0,0999$ etc. $= 9,7 + 0,1 = 9,8 = \frac{98}{10}$.

$25,74999$ etc. $= 25,74 + 0,00999$ etc. $= 25,75 = \frac{2575}{100}$.

*89. En général; *toute fraction décimale périodique mixte, dont la ériode est 9, est équivalente au nombre décimal qu'on obtient, en sup- nt la partie périodique et augmentant d'un, le dernier chiffre à de la partie non périodique. Elle est exprimée par une fraction ire, dont le numérateur est la partie non périodique considérée exprimant des unités simples, et augmentée d'un; et dont le nateur est l'unité suivie d'autant de zéros vers la droite, qu'il de chiffres décimaux dans la partie non périodique.* Ainsi,

$$9,7999 \text{ etc.} = 9,8 = \frac{98}{10};\ 25,74999 \text{ etc.} = 25,75 = \frac{2575}{100}.$$

Lorsqu'un nombre n'est pas composé d'une infinité de décimales, orsqu'étant périodique, la période n'est pas 9, il est impossible exprimer exactement avec un plus petit nombre de chiffres déci- c. Mais, dans beaucoup de circonstances, on se contente d'approcher a valeur, à un dixième près, à un centième près, etc. On peut alors faire age de la règle suivante :

91. *Pour obtenir la valeur d'un nombre, à moins d'une unité décimale de tel ordre déterminé qu'on voudra, il suffit de supprimer les chiffres qui expriment des unités inférieures à cet ordre; le résultat est un peu trop petit; mais si on l'augmentait d'une unité de l'ordre décimal déterminé, il deviendrait trop grand; de sorte que l'erreur commise par la suppression des décimales inférieures à cet ordre, est toujours moindre qu'une unité de ce même ordre. On suppose que la partie supprimée n'est pas composée d'une infinité de 9.* En effet; si la partie supprimée était composée d'une infinité de 9, elle vaudrait une unité du dernier ordre conservé. Or, par hypothèse, elle contient des chiffres moindres que 9; elle a donc une valeur moindre qu'une unité du dernier ordre conservé.

*92. En général; *le nombre exprimé par la totalité des chiffres supprimés sur la droite d'un nombre quelconque, ne peut jamais valoir plus d'une unité de l'ordre du dernier chiffre conservé;* car lors même

que la partie supprimée est composée d'une infinité de 9, elle ne vaut qu'une unité de cet ordre. Par conséquent :

93. *Pour approcher de la valeur d'un nombre décimal, à moins d'un dixième, d'un centième, d'un millième, etc.; il suffit de conserver une, deux, trois, etc., décimales.* La valeur du nombre décimal 3,7543, à moins d'un centième près, est donc 3,75; car la partie négligée 0,0043 est moindre que la fraction décimale périodique mixte 0,0099 etc., c'est-à-dire moindre que 0,01.

94. Quand les valeurs approchées sont assujéties à être moindres que la valeur exacte, la règle du n° 93 donne la plus grande approximation possible. Mais, comme on se propose quelquefois, en ne conservant qu'un certain nombre de chiffres, d'approcher le plus possible de la valeur exacte, sans s'assujétir à rester au-dessous de cette valeur, on doit alors faire usage de la règle suivante : *Pour approcher le plus possible de la valeur exacte d'un nombre, en supprimant plusieurs chiffres sur sa droite, distinguez trois cas ; 1°. si le premier chiffre décimal à supprimer est moindre que 5, supprimez-le avec ceux qui le suivent, en conservant les chiffres placés sur sa gauche ; 2°. s'il est plus grand que 5, ou si, étant égal à 5, il est suivi d'autres chiffres significatifs, augmentez d'un le dernier chiffre conservé ; 3°. s'il est égal à 5 et n'est suivi d'aucuns chiffres significatifs, on peut indifféremment laisser le dernier chiffre décimal à conserver tel qu'il est, ou l'augmenter d'un. Dans le premier cas, la valeur approchée est moindre que la valeur exacte, mais la partie négligée ne peut excéder une demi-unité du dernier ordre conservé. Dans le second cas, la valeur approchée surpasse la valeur exacte, mais l'erreur est moindre qu'une demi-unité du dernier ordre conservé. Dans le troisième cas, l'erreur en plus ou en moins, est égale à une demi-unité du dernier ordre conservé. Ainsi, suivant qu'on s'arrête aux dixièmes, ou aux centièmes, ou etc., inclusivement, l'erreur commise ne peut excéder un demi-dixième, ou un demi-centième, ou etc.* Par exemple, lorsqu'on ne veut conserver que deux ou trois décimales, la va-

leur la plus approchée possible du nombre 5,62379 etc., est 5,62 ou 5,624; l'erreur est moindre qu'un demi-centième ou qu'un demi-millième; car en prenant 5,62, la partie négligée 0,00379 etc., est moindre que 0,005 ou qu'un demi-centième, et le nombre 0,00079 etc., étant plus grand que 0,0005, la quantité qu'il faut ajouter à 5,62379 etc., pour obtenir 5,624, est moindre que 0,0005, ou qu'un demi-millième.

95. *Pour réduire une fraction ordinaire en décimales et trouver sa valeur approchée à moins d'une unité décimale d'un ordre déterminé, il suffit de pousser la division jusqu'au chiffre du quotient qui exprime des unités de cet ordre* (n° 93). *Quand on veut approcher le plus possible de la valeur exacte, avec un nombre déterminé de décimales, on en calcule une de plus, afin de connaître le premier chiffre à supprimer; s'il est moindre que* 5, *les chiffres précédens sont les chiffres demandés; s'il est plus grand que* 5 *ou égal à* 5, *on doit augmenter d'un le dernier chiffre conservé* (n° 94). Prenons pour exemple la fraction $\frac{2}{7}$; en lui appliquant la règle du n° 80, on trouvera 0,285714 etc. Si l'on demande la valeur de $\frac{2}{7}$ à moins d'un millième d'unité près, on calculera seulement les trois chiffres décimaux 2,8,5, dont le dernier exprime des millièmes; ce qui donnera 0,285; mais si l'on voulait approcher le plus possible de la valeur de la fraction $\frac{2}{7}$, en ne conservant que trois décimales au quotient, on calculerait la quatrième décimale, que l'on trouverait égale à 7; comme elle surpasse 5, on augmenterait d'un la troisième décimale, et l'on écrirait 0,286; cette valeur est plus grande que $\frac{2}{7}$, mais elle ne surpasse pas $\frac{2}{7}$ d'un demi-millième.

96. Nous terminerons la *théorie des décimales* en faisant voir comment on peut *calculer le produit de deux nombres décimaux, avec une approximation donnée*. Par exemple, si l'on

veut obtenir le produit, à moins d'un *dixième* d'unité près, on observera que les centièmes et les millièmes des produits partiels, peuvent quelquefois influer sur les dixièmes du produit total, mais que dans ces produits la suppression des unités inférieures aux millièmes, ne doit jamais donner au résultat, qu'une erreur moindre qu'un dixième. On pourra donc négliger dans chaque produit partiel, les unités inférieures aux *millièmes*. Or, les produits des millièmes par les unités, des dix-millièmes par les dixaines, etc., des dixièmes par les centièmes, des centièmes par les dixièmes, etc., expriment des *millièmes*. Par conséquent, pour que le premier chiffre à droite de chaque produit partiel représente des *millièmes*, il suffit, quand on multiplie par les unités simples du multiplicateur, de commencer aux millièmes du multiplicande, en négligeant les unités inférieures; et ensuite, pour les chiffres du multiplicateur qui expriment des unités de dix en dix fois plus grandes ou plus petites que les unités simples, on doit commencer aux chiffres du multiplicande qui représentent des unités de dix en dix fois plus petites ou plus grandes que les millièmes. D'après ces remarques, pour *trouver le produit de* 3,4567892 *par* 12,3456789, *à moins d'un dixième d'unité près*, on exécutera le calcul de la manière suivante.....

Multiplicande.....	3,4567892
Multiplicateur.....	12,3456789
2 fois 3,456, donne.....	6,912
10 fois 3,4567, donne.....	34,567
0,3 fois 3,45, donne.....	1,035
0,04 fois 3,4, donne.....	0,136
0,005 fois 3, donne.....	0,015
Somme.....	42,665.

On voit que l'on a multiplié successivement le multiplicande, par chaque chiffre du multiplicateur, en ne commençant chaque multiplication qu'au chiffre du multiplicande qui donne des millièmes dans le produit. On s'est arrêté au chiffre 5 du multiplicateur, parce que les chiffres 6, 7, 8, 9, de ce multiplicateur,

donneraient des produits partiels moindres que les millièmes. Le produit demandé est donc 42,6. En général, *on doit négliger dans les produits partiels, les unités décimales qui sont de deux rangs au-dessous de l'approximation demandée.* Pour plus de simplicité on peut commencer par les plus hautes unités du multiplicateur.

NOMBRES CONCRETS.

Mesures anciennes.

97. Les *anciennes mesures* étaient composées d'un grand nombre d'unités différentes ; les multiples et les subdivisions de ces unités n'étaient soumises à aucune loi constante. De sorte que *le calcul et la numération des anciennes mesures étaient très-compliqués.* Nous nous bornerons à en donner une idée, pour faire apercevoir les avantages immenses que présentent les nouvelles mesures. Voici une *table des anciennes mesures les plus usitées :*

1°. Pour les *monnaies ;* une *livre tournois*, ou $1^{\#}$, vaut 20 *sous*, ou 20^{s} ; 1^{s} vaut 12 *deniers*, ou 12^{d}. De sorte que $1^{\#}$ vaut 20 fois 12^{d}, ou 240^{d}.

2°. Pour les *poids ;* une livre *poids*, ou 1℔, vaut 16 onces, ou 16° ; une once vaut 8 *gros* ou 8g ; un gros vaut 72 grains, ou 72g. On en déduit que 1℔ = 16onces = 128gros = 9216grains.

Pour les longueurs. Une *toise*, ou 1^{T}, vaut 6 *pieds*, ou 6^{P} ; un *pied* vaut 12 *pouces*, ou 12^{P} ; un *pouce* vaut 12 *lignes*, ou 12^{l} ; une *ligne* vaut 12 *points*. Une *aune* vaut 3 *pieds* 7 *pouces* 10 *lignes* $\frac{5}{6}$, ou $\frac{3161}{6}$ *lignes*.

98. Les nombres concrets qui renferment des unités de différentes grandeurs, sont des *nombres complexes* et les *nombres incomplexes* sont ceux qui ne sont composés que d'une seule espèce d'unité. Ainsi, $17^{\#}$ est un *nombre incomplexe* et $17^{\#}\,2^{s}$ est un *nombre complexe.*

99. *Le calcul des nombres concrets incomplexes n'offre*

aucune difficulté, car il suffit toujours d'opérer sur les nombres abstraits qui expriment combien il y a d'unités dans les nombres donnés. Ce calcul repose sur des principes que nous allons établir.

100. *Pour opérer sur des nombres, on doit d'abord examiner s'ils satisfont aux conditions qui leur sont imposées par la nature de chaque règle; lorsque ces conditions sont remplies, on peut opérer sur les nombres, en faisant abstraction de l'espèce de leurs unités; le nombre abstrait qu'on obtient, exprime de combien d'unités le résultat cherché se compose. L'espèce de ces unités est déterminée par l'état de la question. Ainsi, dans l'*ADDITION *comme dans la* SOUSTRACTION, *les nombres concrets incomplexes sur lesquels on opère, doivent être composés d'unités concrètes de même grandeur et la nature des unités du résultat est la même que celle des unités des nombres sur lesquels on a opéré. Dans la* MULTIPLICATION, *le multiplicateur est essentiellement abstrait, et les unités du produit sont de même grandeur que celles du multiplicande (n° 17). Dans la* DIVISION, *lorsque le dividende et le diviseur sont composés d'unités concrètes de même espèce, le quotient est un nombre abstrait, qui indique combien de fois le dividende contient le diviseur; lorsque le diviseur est abstrait, le quotient est de la nature du dividende; ce quotient n'indique plus combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende, mais multiplié par le diviseur, il reproduit le dividende. Il serait absurde d'ajouter, ou de soustraire des nombres concrets de différente nature, de multiplier deux nombres concrets l'un par l'autre, de diviser l'un par l'autre deux nombres concrets de nature différente, ou un nombre abstrait par un nombre concret.* Ainsi, $2^{\#}$ plus $3^{\#}$ valent $5^{\#}$; de $5^{\#}$ ôtant $3^{\#}$, il reste $2^{\#}$; le produit de $5^{\#}$ par 2, est $10^{\#}$; le quotient de $10^{\#}$ par $5^{\#}$ est 2, et celui de $10^{\#}$ par 2 est $5^{\#}$. On ne peut ajouter $3^{\#}$ à 5 toises. *Le produit de $2^{\#}$ par $3^{\#}$ n'existe pas;* car le multiplicateur est essentiellement abstrait (n° 17); on peut d'ailleurs s'en convaincre, en observant que si le produit de $2^{\#}$ par $3^{\#}$ pouvait être $6^{\#}$, celui des facteurs équivalens 40^{s} et 60^{s}, devrait être

égal à $6^{\#}$ ou à 120^{s}, ce qui est évidemment faux. *Le quotient de* $6^{\#}$ *par* 2 *toises ne peut exister*, car le diviseur 2 toises multiplié par un nombre quelconque, ne pourra jamais donner le dividende $6^{\#}$.

Ces exemples suffisent pour mettre en état d'effectuer les diverses opérations de l'Arithmétique sur les nombres concrets incomplexes.

101. Le *calcul des nombres complexes* s'en déduit; il suffit de convertir ces nombres en fractions irréductibles. Cette conversion n'offre aucune difficulté; s'il s'agit du nombre complexe $3^{\#}\ 5^{s}\ 5^{d}\ \frac{5}{11}$, on dira : $1^{\#}$ vaut 20^{s}, les $3^{\#}$ valent 60^{s}; $3^{\#}\ 5^{s}$ valent donc 65^{s}; mais 1^{s} vaut 12^{d}, les 65^{s} valent donc 65 fois 12 deniers, ou 12 fois 65 deniers, ou 780^{d}; les $3^{\#}\ 5^{s}\ 5^{d}\ \frac{5}{11}$, valent donc $785^{d}\ \frac{5}{11}$, ou $\frac{8640^{d}}{11}$. Mais, $1^{\#}$ vaut 240^{d}; 1^{d} vaut donc $\frac{1^{\#}}{240}$. Les $\frac{8640^{d}}{11}$, valent donc les $\frac{8640}{11}$ de $\frac{1^{\#}}{240}$, ou $\frac{8640^{\#}}{240\times 11}$, ou $\frac{36^{\#}}{11}$. Le nombre complexe $3^{\#}\ 5^{s}\ 5^{d}\ \frac{5}{11}$, est donc exprimé par la fraction irréductible $\frac{36^{\#}}{11}$; et en effet, le onzième de $36^{\#}$ est de $3^{\#}$, pour $33^{\#}$; il reste $3^{\#}$, ou 60^{s}; le onzième de 60^{s} est de 5^{s} pour 55^{s}; il reste 5^{s} ou 60^{d}; le onzième de 60^{d} est $5^{d}\ \frac{5}{11}$; la fraction $\frac{36^{\#}}{11}$, convertie en nombre complexe, reproduit donc les $3^{\#}\ 5^{s}\ 5^{d}\ \frac{5}{11}$.

102. En général : *pour convertir un nombre complexe, en fraction de l'unité principale, on rapportera toutes les parties du nombre donné à la plus petite unité contenue dans ce nombre. La somme de toutes ces parties, sera le numérateur de la fraction demandée; le dénominateur, sera le nombre qui*

exprime combien de fois la plus petite unité (*) *du nombre donné est contenue dans l'unité principale. On réduira ensuite la fraction à sa plus simple expression, en divisant ses deux termes par leur plus grand commun diviseur.* On trouvera ainsi que les nombres complexes,

$$2^{\#}\ 7^{s};\ 2^{\#}\ 1^{s}\ 6^{d}\ \frac{6}{13};\ 0^{\#}\ 16^{s}\ 4^{d}\ \frac{4}{11};\ 2^{T}\ 3^{pi}\ 2^{po}\ 9^{li}\ \frac{3}{13};$$

sont exprimés par les fractions irréductibles

$$\frac{47^{\#}}{20},\ \frac{27^{\#}}{13},\ \frac{9^{\#}}{11},\ \frac{33T}{13}.$$

103. Réciproquement, *pour transformer une fraction concrète en nombre complexe, il suffit d'effectuer la division du numérateur par le dénominateur, en convertissant chaque reste en unités de l'ordre immédiatement inférieur.* On trouvera de cette manière que les fractions

$$\frac{47^{\#}}{20},\ \frac{27^{\#}}{13},\ \frac{9^{\#}}{11},\ \frac{33T}{13}$$

sont exprimées par les nombres complexes

$$2^{\#}\ 7^{s};\ 2^{\#}\ 1^{s}\ 6^{d}\ \frac{6}{13};\ 0^{\#}\ 16^{s}\ 4^{d}\ \frac{4}{11};\ 2^{T}\ 3^{pi}\ 2^{po}\ 9^{li}\ \frac{3}{13}.$$

La conversion des nombres complexes en fractions irréductibles et celle des fractions en nombres complexes, ne pouvant plus offrir de difficulté, *le calcul des nombres complexes est ramené à celui des fractions.* Voici la règle générale :

104. *Pour opérer sur des nombres complexes, on les exprimera d'abord par des fractions irréductibles de même valeur, et alors ; 1°. s'il s'agit d'une* ADDITION *ou d'une* SOUSTRACTION, *on opérera sur les fractions irréductibles équivalentes*

(*) Cette plus petite unité peut être une fraction. Par exemple, dans le nombre $0^{\#}\ 16^{s}\ 4^{d}\ \frac{4}{11}$, la plus petite unité est $\frac{1}{11}$ de denier ; $1^{\#}$ valant 240^{d} ou 2640 onzièmes de denier, la plus petite unité du nombre donné est contenue 2640 fois dans l'unité principale $1^{\#}$.

aux nombres proposés; la fraction qu'on obtiendra, convertie en nombre complexe, exprimera le résultat cherché; 2°. s'il s'agit d'une MULTIPLICATION, *comme le multiplicateur est essentiellement abstrait, on devra faire abstraction de la nature des unités de la fraction irréductible, qui détermine le multiplicateur et la fraction produit, qui sera de l'espèce du multiplicande, convertie en nombre complexe, sera le produit demandé; 3°. enfin, dans la* DIVISION, *si les fractions irréductibles équivalentes au dividende et au diviseur, sont rapportées à la même unité, on les divisera l'une par l'autre, en faisant abstraction de la nature de cette unité; le quotient abstrait, sera le quotient demandé. Si le dividende étant concret, le diviseur est abstrait, on multipliera le dividende par la fraction diviseur renversée; le résultat, qui sera de la nature du dividende, converti en nombre complexe, exprimera le quotient demandé.* Par exemple, s'il s'agit d'opérer sur les nombres complexes,

$$3^{\#}\ 5^{\text{s}}\ 5^{\text{d}}\ \frac{5}{11},\ 2^{\#}\ 9^{\text{s}}\ 1^{\text{d}}\ \frac{1}{11},$$

on y substituera les fractions irréductibles $\frac{36^{\#}}{11}$, $\frac{27^{\#}}{11}$, qui les expriment. La somme $\frac{63^{\#}}{11}$, de ces fractions, convertie en nombre complexe, donnera $5^{\#}\ 14^{\text{s}}\ 6^{\text{d}}\ \frac{6}{11}$, pour la *somme* des nombres proposés; leur *différence* sera $\frac{36^{\#}}{11} - \frac{27^{\#}}{11}$, ou $\frac{9^{\#}}{11}$, ou $0^{\#}\ 16^{\text{s}}\ 4^{\text{d}}\ \frac{4}{11}$; leur *quotient* abstrait sera $\frac{36}{11}$ divisé par $\frac{27}{11}$, ou $\frac{36}{27}$, ou $\frac{4}{3}$. Si le multiplicande étant $3^{\#}\ 5^{\text{s}}\ 6^{\text{d}}\ \frac{5}{11}$, ou $\frac{36^{\#}}{11}$; le multiplicateur abstrait était déterminé par le nombre d'unités et de parties d'unités, contenu dans $2^{\#}\ 9^{\text{s}}\ 1^{\text{d}}\ \frac{1}{11}$, ou $\frac{27^{\#}}{11}$: on multiplierait $\frac{36^{\#}}{11}$ par $\frac{27}{11}$, le résultat $\frac{972^{\#}}{121}$, ou $8^{\#}\ 7^{\text{d}}\ \frac{113}{121}$

exprimerait le produit demandé. Pour faire voir comment on peut être conduit au calcul précédent, nous proposerons cette question :

Trouver l'intérêt de $2^{\#}\ 9^{s}\ 1^{d}\ \frac{1}{11}$, *à raison de* $3^{\#}\ 5^{s}\ 5^{d}\ \frac{5}{11}$ *pour livre.* Si l'on remplace les nombres complexes, par les fractions irréductibles qui les expriment, il ne s'agira plus que de *chercher l'intérêt de* $\frac{27^{\#}}{11}$, *à raison de* $\frac{36^{\#}}{11}$ *pour livre;* cela n'offre aucune difficulté, car l'intérêt de $1^{\#}$ étant $\frac{36^{\#}}{11}$, celui de $\frac{27^{\#}}{11}$, sera les $\frac{27}{11}$ de $\frac{36^{\#}}{11}$, ou $\frac{972^{\#}}{121}$, ou $8^{\#}\ 0^{s}\ 7^{d}\ \frac{113}{121}$. On doit remarquer que le nombre concret $2^{\#}\ 9^{s}\ 1^{d}\ \frac{1}{11}$, ou $\frac{27^{\#}}{11}$, n'a servi qu'à déterminer le multiplicateur abstrait $\frac{27}{11}$. On commettrait une faute grave, en confondant le multiplicateur abstrait $\frac{27}{11}$, avec le nombre concret $\frac{27^{\#}}{11}$, qui n'a servi qu'à le déterminer.

105. La méthode que nous venons d'exposer est la plus simple en théorie, mais comme elle conduit souvent à des calculs compliqués, nous allons faire voir comment on peut *opérer directement sur les nombres complexes.*

Pour ADDITIONNER *des nombres complexes, on écrit les unités de même grandeur les unes sous les autres, et l'on ajoute successivement ces unités, en commençant par les plus petites. On exécute la preuve comme dans le* n° 32, *en commençant par les plus hautes unités, et convertissant les retenues en unités de l'ordre immédiatement inférieur.* En voici des exemples :

Nombres à ajouter.....	7^{T}	5^{pi}	11^{po}	$\frac{3}{4}^{po}$	$18^{\#}$	12^{s}	10^{d}	$\frac{2}{3}$
	9	4	10	$\frac{4}{5}$	18	7	4	$\frac{2}{3}$
Sommes.....	17^{T}	4^{pi}	10^{po}	$\frac{11}{20}$	$37^{\#}$	0^{s}	3^{d}	$\frac{1}{3}$
Preuves.....	1	1	1	0	1	1	1	0

Pour effectuer la première addition, on a commencé par a colonne des fractions de pouces, et l'on a dit : $\frac{3}{4}$ plus $\frac{4}{5}$ va-ent $\frac{31}{20}$ ou $1 + \frac{11}{20}$; on a posé $\frac{11}{20}$ et la retenue 1^{po}, jointe aux 11^{po} contenus dans la colonne des pouces, a donné 22^{po} ou 1^{p} 0^{po}. On a mis les 10^{po} dans la colonne des *pouces;* et la retenue 1^{pi}, jointe à $5^{pi} + 4^{pi}$, a donné 10^{pi}, ou $1^{T}\,4^{pi}$; on a écrit les 4^{pi}, et la colonne des toises, augmentée de la retenue 1^{T}, a donné 17^{T}. Pour vérifier si $17^{T}\,4^{P}\,10^{P}\,\frac{11}{20}$, est la somme des nombres proposés, on a recommencé l'addition dans le sens inverse, et l'on a dit : la colonne des toises contient 16^{T}, on a posé 17^{T}, la toise de surplus provient donc d'une retenue de 5^{pi} faite dans l'addition des *pieds;* mais on a posé 4^{pi}; on a donc trouvé 10^{pi}. Or, l'addition des pieds ne donne que 9^{P}; on avait donc retenu 1^{pi} ou 12^{P}; on a écrit 10^{P}; on a donc trouvé 22 pouces; l'addition des pouces ne donne que 21^{P}; on avait donc retenu 1 pouce; la somme des fractions de pouces doit donc être $1 + \frac{11}{20}$ ou $\frac{31}{20}$. Retranchant $\frac{3}{4} + \frac{4}{5}$, de $\frac{31}{20}$, le reste 0, indique que la somme est exacte. On a effectué la seconde addition d'après les mêmes principes.

106. *La* SOUSTRACTION *s'exécute en prenant les différences entre les unités de même grandeur, et commençant par les plus petites unités, afin de rendre les emprunts possibles.* En voici des exemples,

De.....	17^{T}	4^{pi}	10^{po}	$\frac{11}{20}$	De.....	$37^{\#}$	$0^{\S}$	$3^{\flat}\frac{1}{3}$
Otez.....	9	4	10	$\frac{4}{5}$	Otez.....	18	7	$4\frac{2}{3}$
Reste.....	7	5	11	$\frac{3}{4}$	Reste.....	18	12	$10\frac{2}{3}$
Preuve.....	17	4	10	$\frac{11}{20}$	Preuve.....	37	0	$3\frac{1}{3}$

Comme dans le premier exemple, on ne peut ôter $\frac{4}{5}$ ou $\frac{16}{20}$, de $\frac{11}{20}$, on a emprunté 1^{P} sur les 10^{P}; cet emprunt, joint à $\frac{11^{P}}{20}$, a donné $\frac{31}{20}$; de $\frac{31}{20}$, on a soustrait $\frac{4}{5}$, ce qui a donné le reste $\frac{15}{20}$ ou $\frac{3}{4}$, que l'on a écrit au rang des fractions de *pouces* du résultat. Le nombre dont on soustrait ne contenant plus que 9 pouces, on a emprunté 1^{pi} sur les 4^{pi}, et l'on a retranché les 10^{P} de 1^{P} 9^{P}, ou de 21^{P}; on a écrit le reste 11 pouces. Passant à la colonne des *pieds*, on a emprunté 1^{T} ou 6^{P} et l'on a retranché 4^{P} de 1^{T} 3^{P}, ou de 9^{P}; ce qui a donné 5^{P}. Enfin, on a obtenu les 7 toises du reste total, en retranchant 9^{T} de 16^{T}. Le reste 7^{T} 5^{P} 11^{P} $\frac{3}{4}$ est exact, car ajouté à 9^{T} 4^{P} 10^{P} $\frac{4}{5}$, il donne 17^{T} 4^{P} 10^{P} $\frac{11}{20}$. On a effectué la seconde soustraction d'après les mêmes principes.

107. *Pour* MULTIPLIER *un nombre complexe, par un nombre entier, il suffit d'effectuer la multiplication de chaque partie du multiplicande par le multiplicateur, en commençant par les plus petites unités.* Si l'on veut obtenir le produit de $12^{\#}2^{\S}3^{\flat}\frac{2}{11}$, par 12, on disposera le calcul comme on le voit ici

Multiplicande.....	$12^{\#}$ $2^{\S}$ $3^{\flat}\frac{2}{11}$
Multiplicateur.....	12
Produit.....	$145^{\#}$ $7^{\S}$ $2^{\flat}\frac{2}{11}$

et l'on dira : 12 fois $\frac{2}{11}$, valent $\frac{24}{11}$ ou $2\frac{2}{11}$; j'écris $\frac{2}{11}$ et je re

ı les 2^{d} pour les joindre à 12 fois 3^{d}; ce qui me donne ou 3^{s} 2^{d}; je pose donc 2^{d} au produit et ajoutant la re-ıe 3^{s}, à 12 fois 2^{s}, je trouve 27^{s} ou $1^{\#}$ 7^{s}; j'écris 7^{s} et retenue $1^{\#}$, augmentée de 12 fois $12^{\#}$, donne $145^{\#}$. Le duit total est donc $145^{\#}$ 7^{s} 2^{d} $\frac{2}{11}$.

o8. On peut parvenir au même résultat, en décompo-: le multiplicande de manière que les produits partiels se uisent facilement les uns des autres. A cet effet, on dis-e le calcul de la manière suivante :

Multiplicande.....	$12^{\#}$ 2^{s} 3^{d} $\frac{2}{11}$
Multiplicateur.....	12
12 fois $12^{\#}$, font.....	$144^{\#}$ 0^{s} 0^{d}
12 *fois* $1^{\#}$, *donneraient* $12^{\#}$	
12 fois 2^{s}, donnent donc.....	1 4 0
12 fois 3^{d}, font.....	0 3 0
12 *fois* 2^{d}, *donneraient* 2^{s}.	
12 fois $\frac{2}{11}$ ^{d}, donnent donc.....	0 0 2 $\frac{2}{11}$
12 fois $12^{\#}$ 2^{s} 3^{d} $\frac{2}{11}$, font donc.....	$145^{\#}$ 7^{s} 2^{d} $\frac{2}{11}$

'on dira : 12 fois $12^{\#}$ font $144^{\#}$; 12 fois $1^{\#}$ donneraient $12^{\#}$; is 2^{s} est le dixième de $1^{\#}$; 12 fois 2^{s} donneront donc le ième de $12^{\#}$, ou $1^{\#}$ 4^{s}. Or, 3^{d} est le huitième de 2^{s}; 12 ı 3^{d} donneront donc le huitième de $1^{\#}$ 4^{s}, ou 3^{s}. Enfin, fois 2^{s} ayant donné $1^{\#}$ 4^{s}, et 2^{d} étant le douzième de 2^{s}, produit de 2^{d} par 12, serait le douzième de $1^{\#}$ 4^{s}, ou 2^{s}; produit de $\frac{2}{11}$ de denier, par 12, sera donc le onzième de , ou 2^{d} $\frac{2}{11}$. La somme des produits partiels des differentes rties du multiplicande, par le multiplicateur, a donné le oduit total $145^{\#}$ 7^{s} 2^{d} $\frac{2}{11}$. On voit que l'on a obtenu ce pro-ıit, en décomposant le multiplicande de manière que chaque ırtie du multiplicande soit contenue un nombre entier de fois

dans l'une des parties précédentes. Or, une quantité qui est contenue un nombre entier de fois dans une autre, en est dite une *partie aliquote*. La méthode précédente a reçu par cette raison le nom de *Méthode des parties aliquotes*. On ne devra faire usage de cette méthode que lorsque le multiplicateur sera plus grand que 12.

109. La règle du n° 103, donne le moyen de *diviser un nombre complexe, par un nombre entier abstrait*. Ainsi, pour diviser $145^{\#}\ 7^{s}\ 2^{d}\ \frac{2}{11}$, par 12, on dira : $145^{\#}$ divisé par 12, donne $12^{\#}$ au quotient, avec le reste $1^{\#}$; ce reste ajouté aux 7^{s} du dividende, donne 27^{s}; la division de 27^{s} par 12, donne le quotient 2^{s} et le reste 3^{s}; ce reste, augmenté des 2^{d} du dividende, donne 38^{d}; divisant 38^{d} par 12, le quotient est 3^{d} et le reste 2^{d}, ajouté aux $\frac{2}{11}^{d}$, du dividende, donne $\frac{24}{11}^{d}$ dont le douzième est $\frac{2}{11}^{d}$. Le quotient demandé est donc $12^{\#}\ 2^{s}\ 3^{d}\ \frac{2}{11}$.

110. La *méthode des parties aliquotes* (n° 108) sert à simplifier les calculs relatifs à la *multiplication d'un nombre complexe, par le nombre des unités et parties d'unités abstraites indiqué par un autre nombre complexe*. S'il s'agit par exemple de *déterminer le prix de* $12^{T}\ 5^{P}\ 8^{P}$ *d'un ouvrage dont la toise coûte* $12^{\#}\ 2^{s}\ 3^{d}\ \frac{2}{11}$, on disposera le calcul de la manière suivante.....

Le prix d'une toise étant.....	$12^{\#}$	2^{s}	3^{d}	$\frac{2}{11}$
Quel est le prix de.....	12^{T}	5^{Pi}	8^{po}	
1°. Prix des 12 toises (n° 107).....	$145^{\#}$	7^{s}	2^{d}	$\frac{2}{11}$
2°. Prix des 5^{Pi} { Prix de 3^{Pi} ou de $\frac{1}{2}^{T}$	6	1	1	$\frac{13}{22}$
2°. Prix des 5^{Pi} { Prix de 2^{Pi} ou de $\frac{1}{3}^{T}$	4	0	9	$\frac{2}{33}$
3°. Prix de 8^{po} ou de $\frac{1}{3}$ de 2^{Pi}.....	1	6	11	$\frac{2}{99}$
Prix total des $12^{T}\ 5^{Pi}\ 8^{po}$.....	$156^{\#}$	15^{s}	11^{d}	$\frac{169}{198}$

On a obtenu le prix des 12 toises, en prenant 12 fois le prix d'une toise. Pour trouver le prix de 5^{P}; on a décomposé 5^{P} en $3^{P} + 2^{P}$; la moitié du prix d'une toise a donné le prix des 3 pieds et le tiers du prix de la toise a donné le prix des 2 pieds. Enfin, 8 pouces étant le tiers de 2 pieds, le tiers du prix des 2 pieds a exprimé le prix des 8 pouces. La somme des prix de 12^{T} de 3^{P} de 2^{P} et de 8^{P}, a donné le prix des $12^{T}\ 5^{P}\ 8^{P}$. On voit que cela se réduit à *décomposer l'ouvrage dont on cherche le prix, en parties* ALIQUOTES *les unes des autres, de sorte que le prix de chaque partie de l'ouvrage devienne une partie aliquote d'un prix déjà obtenu.* Ces décompositions peuvent souvent s'effectuer de plusieurs manières différentes; l'habitude du calcul peut seule indiquer le mode de décomposition qui conduit le plus simplement au résultat. Par exemple, si connaissant le prix d'une toise d'ouvrage, on demandait le prix de $4^{P}\ 8^{P}\ 8^{li}$, on pourrait chercher les prix des parties 3^{P}, 1^{P}, 6^{P}, 2^{P}, 6^{li} et 2^{li}, mais il serait plus simple de décomposer l'ouvrage total en 2^{P}, 2^{P}, 8^{po}, 8^{li}, car le tiers du prix d'une toise donnerait le prix de 2^{P}, ou de 24^{P}; le tiers de ce dernier prix, serait le prix des 8^{P}, et le douzième du prix de 8^{P}, exprimerait le prix des 8^{li}. On trouvera de cette manière que la toise coûtant $18^{\#}\ 18^{s}\ 9^{d}$, le prix de $4^{P}\ 8^{po}\ 8^{li}$, est $14^{\#}\ 18^{s}\ 1^{d}\ \frac{1}{12}$.

111. La *division de deux nombres complexes l'un par l'autre,* peut s'effectuer en convertissant ces nombres en fractions irréductibles (n° 102), mais on simplifie le calcul en ramenant la question au cas où le diviseur est un nombre entier. Les nombres complexes qui déterminent le dividende et le diviseur, pouvant être de nature différente ou de même nature, nous allons donner un exemple de chaque espèce.

1°. Pour *trouver le prix de la toise, lorsque* $2^{T}\ 3^{P}\ 6^{P}$ *coûtent* $1^{\#}\ 5^{s}\ 6^{d}$, on dira :

$2^{T}\ 3^{Pi}\ 6^{po}$, coûtant $1^{\#}\ 5^{s}\ 6^{d}$,

2 fois $2^{T}\ 3^{Pi}\ 6^{po}$, ou $5^{T}\ 1^{Pi}$, coûtent 2 fois $1^{\#}\ 5^{s}\ 6^{d}$, ou $2^{\#}\ 11^{s}$,

6 fois $5^{T}\ 1^{Pi}$, ou 31^{T}, coûtent 6 fois $2^{\#}\ 11^{s}$, ou $15^{\#}\ 6^{s}$.

Une toise coûte donc le 31e de $15^{\#}\ 6^{s}$, ou $0^{\#}\ 9^{s}\ 10^{d}\ \frac{14}{31}$.

Pour vérifier l'exactitude de ce résultat, on cherchera le prix de $2^{T}\ 3^{P}\ 6^{Po}$, à raison de $9^{s}\ 10^{d}\ \frac{14}{31}$ la toise; on trouvera que ce prix est $1^{\#}\ 5^{s}\ 6^{d}$ (n° 110).

2°. Si l'on veut *déterminer combien on aura de toises d'ouvrage, pour* $1^{\#}\ 5^{s}\ 6^{d}$, *à raison de* $9^{s}\ 10^{d}\ \frac{14}{31}$ *la toise*, on observera que le nombre de toises cherché sera le quotient de la division du premier nombre par le second. Mais, un quotient ne change pas lorsqu'on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre (n° 39); multipliant donc le dividende et le diviseur par 31, les produits seront $39^{\#}\ 10^{s}\ 6^{d}$ et $15^{\#}\ 6^{s}$; doublant ces nombres et multipliant les résultats par 20, la question sera réduite à diviser $1581^{\#}$ par $612^{\#}$; de sorte que le nombre de toises demandé est $\frac{1581}{612}$ ou $\frac{527}{204}$. Divisant 527 toises par 204, le quotient $2^{T}\ 3^{P}\ 6^{P}$, indiquera combien on aura d'ouvrage pour $1^{\#}\ 5^{s}\ 6^{d}$.

112. *Remarque.* Lorsque la méthode du n° 111, conduit à multiplier par des nombres très-grands, il est plus simple de convertir les nombres complexes en fractions irréductibles. Par exemple, si une toise d'ouvrage coûtant $0^{\#}\ 16^{s}\ 4^{d}\ \frac{4}{11}$, on voulait savoir combien on aurait de toises pour $2^{\#}\ 1^{s}\ 6^{d}\ \frac{6}{13}$, le procédé le plus simple serait de convertir ces nombres en fractions irréductibles; on trouverait $\frac{9}{11}^{\#}$ et $\frac{27}{13}^{\#}$; divisant $\frac{27}{13}$ par $\frac{9}{11}$, le quotient $\frac{33}{13}$ exprimerait le nombre de toises cherché; la réponse à la question serait donc $\frac{33^{T}}{13}$ ou $2^{T}\ 3^{P}\ 2^{P}\ 9^{li}\ \frac{3}{13}$.

* 113. Les principes des n°s 26 et 62, donnent le moyen de *simplifier la multiplication et la division d'un nombre complexe, par un nombre entier abstrait.* Ainsi, pour multiplier $12^{\#}\ 2^{s}\ 3^{d}\ \frac{2}{11}$, par le produit 84, des fac-

teurs 12 et 7, on multipliera d'abord $12^{\#}\ 2^{s}\ 3^{d}\ \frac{2}{11}$, par 12; le produit $145^{\#}\ 7^{s}\ 2^{d}\ \frac{2}{11}$, multiplié par 7, donnera $1017^{\#}\ 10^{s}\ 3^{d}\ \frac{3}{11}$, pour le produit demandé. Si l'on demandait le quotient de la division de $1017^{\#}\ 10^{s}\ 3^{d}\ \frac{3}{11}$, par 84; on diviserait ce dividende, par 7; le quotient $145^{\#}\ 7^{s}\ 2^{d}\ \frac{2}{11}$, divisé par 12, donnerait $12^{\#}\ 2^{s}\ 3^{d}\ \frac{2}{11}$, pour le quotient demandé.

Voici quelques exemples sur lesquels il sera bon de s'exercer.

1°. Le prix d'une toise étant $3^{\#}\ 10^{s}\ 5^{d}$, on demande le prix de 12 toises 5 pieds 7 pouces? Le résultat demandé est $45^{\#}\ 10^{s}\ 6^{d}\ \frac{23}{72}$.

2°. Le prix de 32 toises 5 pieds 7 pouces 9 lignes $\frac{5}{9}$ étant $1^{\#}$, combien aura-t-on de toises pour $5544^{\#}\ 14^{s}\ 8^{d}$. La réponse est 182 652 toises 2 pieds 9 pouces 11 lignes $\frac{109}{135}$.

3°. La livre de fer coûtant $1^{\#}\ 17^{s}\ 6^{d}$, quel est le prix de 2 livres 1 marc 1 once 6 gros 16 grains, de ce métal. Le prix cherché est $4^{\#}\ 17^{s}\ 11^{d}$.

4°. Le prix d'une toise d'ouvrage étant $3^{\#}\ 10^{s}\ 5^{d}$, combien aura-t-on de toises pour $45^{\#}\ 10^{s}\ 6^{d}\ \frac{23}{72}$? La réponse est 12 toises 5 pieds 7 pouces.

5°. Le prix de 12 toises 5 pieds 7 pouces, étant $45^{\#}\ 10^{s}\ 6^{d}\ \frac{23}{72}$, quel est le prix de la toise? Réponse $3^{\#}\ 10^{s}\ 5^{d}$.

La *complication des opérations de l'Arithmétique sur les nombres complexes qui expriment les anciennes mesures*, étant due au peu d'uniformité des subdivisions de chaque espèce d'unité concrète, on est conduit à chercher s'il ne serait pas possible de *soumettre les subdivisions de chaque espèce d'unité concrète à une même loi*; le *système des nouvelles mesures*, que nous allons exposer, fera connaître comment on y est parvenu.

SYSTÈME DES NOUVELLES MESURES.

114. *Pour donner à un système de mesures toute la perfection possible, il faudrait, 1° choisir une unité principale, qui pût se vérifier dans tous les temps et dans tous les pays où elle serait établie; 2° faire dépendre toutes les mesures, de cette unité principale; 3° choisir pour valeurs des multiples et des subdivisions de chaque espèce d'unité concrète, celles qui ont le plus de rapport avec notre système de numération et qui conduisent aux calculs les plus simples; 4° composer la nomenclature du plus petit nombre de mots possible; 5° donner aux multiples et aux subdivisions de chaque espèce d'unité concrète, des noms qui indiquent leur rapport avec l'unité principale; 6° éviter le plus possible les fractions, en subdivisant chaque espèce d'unité concrète de la manière la plus convenable à ses usages.* L'étendue de cet ouvrage ne me permettant pas de rendre compte des travaux immenses qui ont été exécutés pour établir le *système des nouvelles mesures*, je vais en offrir les résultats. On verra qu'*on est parvenu à simplifier en même temps la nomenclature et les calculs, en diminuant le nombre des noms, et en réduisant aux opérations sur les décimales, toutes celles de l'Arithmétique*, ce qui bannit entièrement le calcul des fractions et celui des nombres complexes.

On peut compter sept espèces de mesures, essentiellement différentes; savoir, 1° *les mesures linéaires, ou de* LONGUEUR; 2° *les mesures de* SUPERFICIE; 3° *les mesures de* VOLUME, *ou de capacité*; 4° *les mesures de pesanteur, ou les* POIDS; 5° *les mesures de valeur, ou les* MONNAIES; 6° *les mesures circulaires, ou les* DEGRÉS; 7° *les mesures temporaires ou de* DURÉE.

L'unité de longueur, ou l'unité *linéaire* est le *mètre*; l'unité de *superficie* se nomme *are*; l'unité de *volume* est le *stère*; l'unité de *capacité* est le *litre*; l'unité de *poids* est le *gramme*; l'unité *monétaire* est le *franc*; l'unité circulaire est le *quadran*; enfin l'unité de *temps* est l'*heure* (*).

(*) L'*are* remplace l'*arpent*, pour mesurer les surfaces des terrains. Le *mètre quarré* remplace l'*aune*, pour mesurer les toiles, les draps, etc. Le

Pour déterminer le *mètre*, on a mesuré la distance du pôle à l'équateur, sur le *méridien* de Paris; cette distance est de 5130740 toises, ou de 30784440 pieds; on l'a divisée par dix millions et le quotient, 3pi,0784440, a exprimé la *longueur du mètre*. Voici comment on en a déduit les valeurs des autres unités. Le *quarré* dont chaque côté aurait dix mètres de longueur, forme l'*are*; il équivaut à *cent mètres quarrés*, c'est-à-dire à cent quarrés d'un mètre de côté; le mètre *cube* a formé le *stère;* le *litre* contient un décimètre cube; le poids d'un centimètre cube d'eau distillée a composé le *gramme;* une pièce d'argent, pesant cinq grammes et alliée d'un dixième de cuivre, a formé le *franc;* l'unité circulaire est le *quadran*, quart de la circonférence et mesure de l'angle droit; la nouvelle heure est la dixième partie du jour *naturel;* l'ancienne heure en était la vingt-quatrième partie.

115. La division décimale a été adoptée, pour remplacer dans chaque espèce d'unité concrète, les divisions qu'on en avait faites jusqu'ici. Pour composer des mesures plus grandes ou plus petites que l'unité principale, on fait précéder le nom de cette unité des mots,

Myria, kilo, hecto, déca, déci, centi, milli,

qui désignent respectivement,

des *dixaines de mille*, des *mille*, des *centaines*, des *dixaines*, des *dixièmes*, des *centièmes*, des *millièmes*.

D'après ces conventions, le *myria*-mètre vaut *dix mille* mètres, le *kilo*-mètre vaut *mille* mètres, un *hecto*-mètre vaut *cent* mètres, le *déca*-mètre vaut *dix* mètres, le *déci*-mètre est la *dixième* partie du mètre, le *centi*-mètre est le *centième* du

---

stère et le *litre*, mesurent également des volumes, mais le stère sert aux corps durs, et l'on fait usage du litre, quand on veut mesurer des fluides, ou des matières sèches qui peuvent s'y assimiler par la facilité avec laquelle elles prennent la forme du vase dans lequel on les mesure.

Les définitions exactes, du *quarré*, du *cube* et du *degré*, ne peuvent se donner qu'en *Géométrie*.

mètre et le *milli*-mètre vaut la *millième* partie du mètre. Les multiples et les subdivisions des autres unités concrètes suivent la même loi; ainsi, comme *deca* signifie *dix*, pour exprimer dix litres, on dira un *décalitre;* de même, pour énoncer dix mille grammes, on dira un *myriagramme.* Dix millimètres valent un centimètre, car dix millièmes valent un centième; dix centimètres valent un décimètre; dix décimètres valent un mètre; dix mètres valent un décamètre, dix décamètres valent un hectomètre, dix hectomètres composent un kilomètre, et dix kilomètres forment un myriamètre.

* 116. Nous allons actuellement faire connaître les noms synonymes que depuis l'établissement des nouvelles mesures, on substituait dans le commerce aux nouveaux noms. Nous indiquerons ensuite les modifications adoptées pour la vente en détail. Les mesures de longueur comprennent, les mesures *itinéraires*, ou de grande étendue, telles que le *degré* terrestre et la lieue; les mesures *linéaires* ou de petite étendue, telles que la toise, l'aune, etc. Pour exprimer la distance d'un lieu à un autre, on emploiera les mots *myriamètre* et *kilomètre*, qui peuvent être traduits par *lieue* et *mille;* le myriamètre, ou la lieue nouvelle, vaut dix kilomètres, ou dix *milles;* le kilomètre, ou le nouveau *mille*, vaut mille mètres. Les *mesures linéaires* peuvent s'exprimer en décamètres, en mètres, en décimètres, en centimètres, et en millimètres; on leur a donné pour synonymes les mots *perches*, *mètres*, *palmes*, *doigts* et *traits;* le mètre, comme unité fondamentale des nouvelles mesures, n'a pas de synonyme. Ainsi, le décamètre, ou la perche nouvelle, vaut dix mètres; le mètre vaut dix décimètres, ou dix palmes; le décimètre, ou la palme, vaut dix centimètres ou dix doigts; enfin le centimètre, ou le doigt, vaut dix millimètres, ou dix traits. Le mètre et ses subdivisions remplacent l'aune, la toise, le pied, le pouce, etc. Les *mesures agraires* servent à exprimer les surfaces des terrains; on doit faire usage de l'*hectare*, de l'*are*, ou du *centiare*, qui peuvent être traduits par les mots *arpent*, *perche quarrée*, et *mètre quarré;* l'hectare ou l'arpent nouveau, vaut cent ares, ou cent perches quarrées nouvelles; l'are ou la nouvelle perche quarrée, vaut cent mètres quarrés; le centiare, centième partie de la nouvelle perche quarrée, vaut un mètre quarré; pour les petites surfaces, le mètre quarré vaut cent décimètres quarrés, ou cent *palmes quarrées;* le décimètre quarré, ou la palme quarrée, vaut cent centimètres quarrés, ou cent *doigts quarrés;* enfin le centimètre quarré ou le doigt quarré, vaut cent millimètres quarrés, ou cent *traits quarrés*. Les *volumes* s'expriment en mètres cubes. Pour les bois de chauffage, l'unité de mesure est le *stère*, ou mètre cube. Les *mesures de capacité* servent aux liquides et à certaines matières sèches; les fluides, tels que les vins, les liqueurs, etc., se mesurent

avec le *décalitre*, le *litre*, et le *décilitre*, auxquels on a donné pour synonymes les mots *velte*, *pinte*, *verre*; le décalitre ou la velte nouvelle, vaut dix litres, ou dix pintes nouvelles et le litre, ou la pinte nouvelle, vaut dix décilitres, ou dix verres. Les matières sèches, telles que le seigle, l'orge, etc., se mesurent avec le *kilolitre*, l'*hectolitre*, le *décalitre* et le *litre*, auxquels on a donné pour synonymes, les anciens noms, *muid*, *septier*, *boisseau* et *litron*; le *kilolitre*, ou le muid nouveau, vaut dix hectolitres, ou dix septiers nouveaux : l'hectolitre, ou le septier nouveau, vaut dix décalitres, ou dix boisseaux nouveaux; le décalitre, ou le boisseau nouveau, vaut dix litres, ou dix litrons nouveaux. Les *poids* qui servent à peser les marchandises, sont le *kilogramme*, l'*hectogramme*, le *décagramme*, le *gramme* et le *décigramme*; leurs synonymes sont la *livre*, l'*once*, le *gros*, le *denier* et le *grain*. Le kilogramme, ou la livre nouvelle, vaut dix hectogrammes, ou dix onces nouvelles; l'hectogramme, ou la nouvelle once, vaut dix décagrammes, ou dix gros nouveaux; le décagramme, ou le gros nouveau, se compose de dix grammes, ou de dix deniers nouveaux; enfin, le gramme ou le denier nouveau, est équivalent à dix décigrammes, ou à dix grains nouveaux. Les fortes pesées se font en *milliers*, de mille livres nouvelles et en *quintaux*, de cent livres nouvelles. Pour les *monnaies*, le *franc* remplace la *livre tournois*; il vaut dix *décimes*, et le décime vaut dix *centimes*; le franc vaut donc cent centimes. Les pièces de cinq francs, sont au *titre* de neuf dixièmes de fin; elles pèsent chacune 25 grammes; de sorte que *la pièce d'un franc pèse 5 grammes*; 40 pièces de 5 francs ou 200 francs, pèsent donc 1000 grammes, ou un kilogramme, ou une livre-poids nouvelle. On n'a pas donné de noms particuliers aux multiples du franc. La dixième partie du franc se nomme *décime* et la centième partie du franc se nomme *centime*. On s'arrête à cette dernière subdivision; de sorte qu'on compte par *francs*, *décimes* et *centimes*.

Remarque. Les subdivisions décimales des poids et mesures étant très-incommodes dans le commerce en détail, un arrêté du 21 février 1816, abolit ces subdivisions (pour la vente en détail seulement). De sorte, qu'à l'avenir, les marchands en détail seront tenus d'employer exclusivement les poids et mesures que nous allons indiquer :

1°. Pour le débit des bois à œuvrer, matériaux et autres objets de construction, la *toise* (égale à deux mètres), et le *pied* (égal à un tiers de mètre).

2°. Pour la vente des toiles, étoffes et autres tissus, l'*aune* (égale à 12 décimètres), divisée en demi, quart, huitième, seizième et trente-deuxième, ainsi qu'en tiers, sixième, douzième et vingt-quatrième.

3°. Pour la vente du charbon de bois, des grains et autres matières sèches, le *double boisseau*, le *boisseau*, le *demi-boisseau* et le *quart de boisseau* (égaux à un quart, un huitième, un seizième et un trente-deuxième d'hectolitre).

4°. Pour la vente des graines et légumes, du vin, de l'eau-de-vie et

autres liquides, le *litre*, le *demi*, le *quart*, le *huitième* et le *seizième de litre*.

5°. Pour les marchandises qui se vendent au poids, la *livre* (égale au demi-kilogramme), la *demi-livre*, le *quart de livre* ou *quarteron*, l'*once*, la *demi-once*, le *quart d'once* ou *deux gros*, et le *gros* qui se divise en soixante-douze grains.

117. *Les multiples et les subdivisions des mesures nouvelles étant soumis à la loi décimale, la numération et le calcul de ces nouvelles mesures, sont les mêmes que pour les nombres décimaux.* Par exemple, s'il s'agit de mettre en chiffres, le nombre, six décamètres, quatre mètres, sept décimètres, ce nombre étant composé de 6 dixaines de mètre, de 4 unités, et de 7 dixièmes de mètre, on écrira $64^{\text{mèt.}},7$.

118. En général; *Pour mettre en chiffres une nouvelle mesure, dictée ou énoncée en lettres; on l'écrira d'après les règles relatives aux nombres décimaux, en faisant abstraction de l'espèce de l'unité concrète; on placera ensuite sur la droite du chiffre des unités, la lettre initiale du nom de l'unité concrète; c'est-à-dire une* m, *ou une* f, *ou un* g, *ou une* l, *suivant qu'il s'agira de mètres, ou de francs, ou de grammes, ou de litres.* Si l'énoncé était, deux cent vingt-sept grammes, trente-neuf centigrammes, on écrirait 227g,39.

119. Réciproquement : *Pour énoncer une nouvelle mesure exprimée par un nombre décimal concret, il suffit d'énoncer le nombre décimal en faisant abstraction de la nature de ses unités; on remplace ensuite dans cet énoncé, l'unité abstraite, par l'unité concrète dont il s'agit.* Par exemple; le nombre abstrait 34,72, ayant pour énoncé 34 unités 72 centièmes, ou 3 dixaines 4 unités 7 dixièmes 2 centièmes, ou 3472 centièmes; si l'on remplace l'unité abstraite, par l'unité concrète égale au *mètre*, le nombre concret $34^{\text{m}},72$ aura pour énoncé, 34 mètres 72 centimètres, ou 3 décamètres 4 mètres 7 décimètres 2 centimètres, ou 3472 centimètres.

120. Comme d'après le système des nouvelles mesures, les multiples et les subdivisions de chaque espèce d'unité concrète sont assujétis à la loi décimale; *pour rapporter une nouvelle*

mesure, exprimée par un nombre décimal, à l'une quelconque des unités concrètes de son espèce, il suffit de transporter la virgule décimale, sur la droite du chiffre qui exprime des unités de l'ordre demandé. Ainsi, pour convertir $4567^m,8$, en hectomètres, ou en centaines de mètre, on transportera la *virgule* sur la droite du chiffre 5 des centaines de mètre, et l'on écrira 45 hectom.,678. Cette règle s'applique également au cas où le nombre proposé est déjà rapporté à un multiple, ou à une subdivision de l'unité principale. Par exemple, pour convertir 45 hectom.,678, en mètres, on transportera la virgule sur la droite du chiffre 7, qui exprime des centièmes d'hectomètre, ou des mètres; ce qui donnera $4567^m,8$. Si le nombre des chiffres, nécessaire au déplacement de la virgule, n'était pas suffisant, on y suppléerait par des zéros ; pour convertir 5 décam.,27 en kilomètres, on écrira 0 kilom.,0527.

121. Les nouvelles mesures étant exprimées exactement au moyen des décimales, leur calcul est le même que celui des nombres décimaux. Ainsi, *lorsqu'il s'agit d'ajouter ou de soustraire des nombres rapportés à la même unité concrète, on effectue le calcul d'après la règle du* n° 70. *Quand les nombres proposés sont composés d'unités différentes, on les rapporte d'abord à la même unité* (n° 120). Ainsi, pour additionner ou pour soustraire, les nombres 377 décim.,4 et 0 kilom.,009368, dont les unités principales sont le *décimètre* et le *kilomètre* ; on les rapportera d'abord à la même unité; au *mètre*, par exemple; ce qui donnera $37^m,74$ et $9^m,368$; effectuant le calcul sur ces deux derniers nombres, on trouvera que la somme des nombres proposés est $47^m,108$, et que leur différence est $28^m,372$.

La MULTIPLICATION *s'effectue d'après la règle du n°* 75. On trouvera que le produit de $20^m,4$ par 2,4489, est $49^m,95756$.

La DIVISION *s'exécute d'après la règle du n°* 76. Pour diviser l'un par l'autre, les deux nombres $49^m,95756$ et $20^m,4$, dont l'unité principale est le mètre; on effectuera la division, en faisant abstraction de la nature de cette unité; le résultat 2,4489, sera le quotient demandé. Si, changeant l'ordre des

facteurs, on veut diviser $49^m,95756$ par $2,4489$; on effectuera la division, en faisant abstraction de la nature des unités du dividende; le quotient, $20,4$, devant être de la nature du dividende, sera $20^m,4$. Enfin, s'il s'agissait de diviser $4995^{\text{centim.}},756$ par $20^m,4$, on convertirait le dividende en mètres et la question serait réduite à diviser $49^m,95756$ par $20^m,4$; le quotient serait $2,4489$.

122. Les exemples précédens suffisent pour mettre en état d'*effectuer les diverses opérations de l'Arithmétique sur les nouvelles mesures. Les règles des n°s 93, 94 et 96, s'appliquent aux nombres décimaux concrets.* Les valeurs approchées du nombre $24^m,4817$, à un décimètre ou à un centimètre près, sont $24^m,4$ ou $24^m,48$, et les valeurs les plus approchées du même nombre, lorsqu'on néglige les unités inférieures aux décimètres ou aux centimètres, sont $24^m,5$ ou $24^m,48$; les erreurs commises sont alors moindres qu'un demi-décimètre ou qu'un demi-centimètre. Le produit de $3^m,4567892$ par $12,3456789$, à moins d'un décimètre près, est $42^m,6$ (n° 96).

123. Les *rapports qui existent entre les mesures anciennes et les nouvelles*, se déduisent facilement du *rapport de la toise au mètre* (*). En effet;

1°. Pour les *mesures linéaires*, on a

5 130 740 toises = 10 000 000 mètres (n° 114). Donc....

$$1^T = \frac{10\ 000\ 000^m}{5\ 130\ 740} = 1^m,949\ 036\ 591\ 2 \text{ etc.}$$

$$1^m = \frac{5\ 130\ 740^T}{10\ 000\ 000} = 0^T,513\ 074\ 0.$$

Le *pied*, étant la sixième partie de la toise, 1 *pied* vaut le sixième de $1^m,94903$ etc., ou $0^m,324\ 839\ 43$ etc.; 1 *pouce* vaut le douzième de $0^m,32483$ etc., ou $0^m,\ 027\ 069\ 95$ etc.; et une *ligne* vaut $0^m,002\ 255\ 829\ 3$ etc.

(*) On effectuera toutes les multiplications d'après la règle abrégée du n° 96; et l'on ne prendra dans chaque nombre que les décimales énoncées. Ainsi, pour trouver la valeur de la lieue terrestre, en mètres, on a formé le produit de $0^m,324\ 839\ 43$ par 13 682, à moins d'un centième d'unité près; ce qui a donné $4\ 444^m,45$, ou $4^{\text{kilom.}}\ 1\ 444\ 45$ (n° 96).

Une toise valant 6 pieds ; on convertira les toises en pieds, en multipliant le nombre des toises, par 6. Un mètre vaut donc 6 fois 0^{pi}, 513 074 0, ou 3^{pi}, 078 444 0. On trouvera de cette manière que...

Un mètre $= 0^{T},513\ 074\ 0 = 3^{pi},078\ 444\ 0 = 36^{po},941\ 328 = 443^{lig.},295\ 936$.

Pour calculer les *rapports, de l'aune au mètre et du mètre à l'aune*, on dira :

$1^{aune} = \frac{3161^{lig.}}{6}$ (n° 97); or $1^{lig.} = 0^{met.},002\ 255\ 829\ 387\ 98$ etc.

Une aune vaut donc les $\frac{3161}{6}$ de $0^{m},002\ 255\ 829\ 3$ etc., ou $1^{m},188\ 446\ 115\ 9$ etc.

Un mètre vaut donc $\frac{1^{aune}}{1,188\ 446\ 115\ 9 \text{ etc.}}$, ou..... $0^{aune},841\ 434\ 867$ etc.

Les *rapports, de la lieue terrestre au kilomètre et du kilomètre à la lieue terrestre*, se déduisent de la valeur du pied en mètres. En effet; la lieue terrestre, de 25 au *degré*, est de 13 682 pieds; mais $1^{P} = 0^{m},324\ 839\ 43$ etc.; la lieue terrestre vaut donc 13 682 fois $0^{m},324\ 839\ 43$ etc., ou $4^{kilom.},44\ 445$ etc. Le kilomètre vaut donc $\frac{1^{lieue\ terr.}}{4,444\ 45 \text{etc.}}$, ou $0^{ll.\ terr.},225$ etc.

La *lieue marine* étant de $17\ 102^{P},46$, on trouvera de même que

1 lieue marine $= 5^{kilom.},555\ 55$ etc. et, que $1^{kilom.} = 0^{lieue.\ mar.},18\ 000$ etc.

2°. Les *rapports, du kilogramme à la livre-poids et de la livre-poids au kilogramme*, se déduisent du rapport du kilogramme au *grain*. On trouve que le kilogramme vaut.... $18\ 827^{grains},15$; mais

$1^{grain} = \frac{1^{lb}}{9216}$; donc $1^{kilog.} = 18\ 827,15$ fois $\frac{1^{lb}}{9216} = 2^{lb},042\ 876\ 519$ etc.

$1^{lb} = \frac{1^{kilog.}}{2,042\ 876\ 519 \text{ etc.}} = 0^{kilog.},489\ 505\ 357$ etc.

Or, $1^{lb} = 16^{onces}$; $1^{once} = 8^{gros}$; $1^{gros} = 72^{grains}$. Donc...

$$1^{kilog.} = 2^{lb},042\ 876\ 519 \text{ etc.} = 32^{onces},686\ 024\ 304 \text{ etc.}$$
$$= 261^{gros},488\ 194\ 432 \text{ etc.}$$
$$1^{once} = 0^{kilog.},030\ 594\ 084;\ 1^{gros} = 0^{kilog.},003\ 824\ 260;$$
$$1^{grain} = 0^{kilog.},000\ 053\ 112.$$

3°. Pour calculer les *rapports de la livre tournois au franc et du franc à la livre tournois*, on dira :

$$1^{kilog.} = 18\ 827^{grains},15;\ \text{donc}\ 1^{gramm.} = 18^{grains},827\ 15.$$

Une pièce d'un franc pèse 5 grammes, ou $94^{grains},135\ 75$. Mais, le franc contient en argent fin les $\frac{9}{10}$ de son poids (n° 116), c'est-à-dire les $\frac{9}{10}$ de $94^{grains},135\ 75$, ou $84^{grains},722\ 175$. La *livre tournois*, calculée d'après l'écu de $6^{\#}$, contient..... $83^{grains},675\ 936$ d'argent fin. Par conséquent,

$$\text{Un grain d'argent fin vaut}\ \frac{1^{franc}}{84,722\ 175},\ \text{ou}\ \frac{1^{\#}}{83,675\ 936}.$$

Réduisant ces deux fractions au même dénominateur, les numérateurs seront égaux; ce qui donnera..... $83^{f},675\ 936 = 84^{\#},722\ 175$. D'où

$$1^{\#} = \frac{83\ 675\ 936^{f}}{84\ 722\ 175} = 0^{f},987\ 650\ 942 \text{ etc.},$$
$$1^{f} = \frac{84\ 722\ 175^{\#}}{83\ 675\ 936} = 1^{\#},012\ 503\ 47 \text{ etc.}$$

124. Pour faciliter les *conversions des anciennes mesures en mesures nouvelles et réciproquement*, on a formé des *tables* qui renferment les valeurs des mesures anciennes et nouvelles exprimées par des nombres d'un seul chiffre, en mesures nouvelles et anciennes. La formation de ces *tables* ne présente aucune difficulté. Ainsi, la toise valant $1^{m},9490365 9$ etc.; 9 toises valent, 9 fois $1^{m},949$ etc., ou $17^{m},541329$ etc.

125. Si l'on réfléchit sur la nature du *système des nouvelles mesures*, et sur les effets produits par le déplacement de la *virgule*, dans un nombre décimal (n° 71), on en déduira facilement les *usages des tables*. Par exemple, pour convertir 907 toises, en mètres, on décomposera ce nombre en 900^{t}

plus 7^{T}; les conversions de ces parties en mètres, s'effectueront à l'aide du premier tableau et du déplacement de la *virgule*; voici le détail du calcul :

9 toises valent $17^{m},54133$; les 900^{T} valent donc	$1754^{m},133$
Les 7 toises valent.....	$13^{m},64326$
Les 907 toises valent donc.....	$1767^{m},77626$.

Pour évaluer $9^{T},07$ en mètres, on fera d'abord abstraction de la *virgule;* le résultat 907 toises, converti en mètres, donnera $1767^{m},77626$; le nombre proposé, qui est 100 fois plus petit, vaut donc $17^{m},6777626$. *Réciproquement*, pour convertir $1767^{m},776$ en toises, on décomposera ce nombre en ses unités des différens ordres; on cherchera les valeurs, en toises, de ces unités; leur somme étant $906^{T},99$ etc., on en conclura que les $1767^{m},776$, valent 907^{T}, à moins d'un centième de toise près; ce qui vérifie l'exactitude du premier exemple. On trouvera de même que $4^{kilog.},04955$ valent $8^{lb},27$ 27 etc., ou..... 8^{lb} $4^{onc.}$ 2^{gros} $2^{den.}$ 17^{grains}.

126. Les *tables* donnent la solution de tous les problèmes relatifs aux mesures anciennes et nouvelles. Par exemple, pour *trouver le prix du mètre, lorsqu'une toise coûte* $12^{\#}$; on cherchera combien il faut de toises pour composer un mètre; on trouvera, dans la première table, qu'un mètre vaut $0^{T},51307$; multipliant le prix $12^{\#}$ d'une toise, par le nombre abstrait 0,51307, qui exprime combien il faut de toises pour composer un mètre, le produit $6^{\#},15684$, ou $6^{\#}$ 3^{s} $1^{d},6$ etc., sera le prix du mètre. Pour *trouver le prix de la toise, quand le mètre coûte* $6^{\#}$ 3^{s} $1^{d},6$, on convertira 3^{s} $1^{d},6$ en décimales de la livre; ce qui donnera $0^{\#},15666$; on cherchera ensuite combien il faut de mètres pour composer une toise; on trouvera qu'une toise vaut $1^{m},94904$; multipliant le prix $6^{\#},15666$ d'un mètre, par le nombre 1,94 904, qui indique combien il y a de mètres dans une toise, on trouvera, que le prix cherché est $12^{\#}$, à moins d'un millième de livre près.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

SECONDE PARTIE.

PROBLÈMES.

127. Douze *mètres de drap, coûtent 48 francs; on dema de 5 mètres du même drap.* En examinant cet énoncé, on v dépend du prix du mètre; car, s'il était connu, en le répétan aurait le prix des 5 mètres. Mais, le prix d'un mètre est le prix de 12 mètres. *La marche à suivre est donc de déduire, 12 mètres, le prix du mètre, et de le répéter 5 fois, pou prix des cinq mètres.* Actuellement que nous sommes ass calculs conduiront au résultat, effectuons-les.

12 *mètres* coûtant..... 48f.
1 *mètre* coûtera le 12e de 48 francs, ou..... 4f.
Les 5 *mètres coûteront donc*, 5 fois 4 francs, ou.. 20f.

128. *Douze mètres de drap ont coûté 48 francs; combie de mètres du même drap, pour 20 francs.*

Pour 48 francs, on a.....

Pour 1 franc, on aura le 48e de 12m, ou $\frac{12^m}{48}$, ou.....

Pour 20 francs, *on aura* 20 fois $\frac{1^m}{4}$, ou $\frac{20^m}{4}$, ou.....

129. *Trente mètres de drap à* $\frac{6}{8}$, *coûtent* 720 *francs; quel de* 20 *mètres à* $\frac{5}{8}$? (*)

30m à $\frac{6}{8}$ coûtant..... 72

1m à $\frac{6}{8}$ coûtera le 30e de 720 francs, ou..... 2

1m à $\frac{1}{8}$ coûtera le 6e de 24 francs, ou..... 4

1m à $\frac{5}{8}$ coûtera 5 fois 4 francs, ou..... 2

Les 20m *à* $\frac{5}{8}$ *coûteront donc*, 20 *fois* 20 *francs*, *ou*.... 40

(*) Un mètre à $\frac{6}{8}$, est une *surface* qui a un mètre de long, et large; et un mètre de long sur $\frac{5}{8}$ de mètre de large, forme le

130. *On demande combien il faut prendre de mètres de toile à* $\frac{5}{8}$ *pour doubler* 30 *mètres de drap à* $\frac{6}{8}$?

Si la toile avait $\frac{6}{8}$ de large, il en faudrait..... 30^m.

Si la toile n'avait que $\frac{1}{8}$, il en faudrait 6 fois plus, ou... 180^m.

La toile ayant $\frac{5}{8}$, il n'en faut que le 5e de 180^m, ou... 36^m.

131. *Trente mètres de toile à* $\frac{6}{8}$, *ont coûté* 180 *francs. Quel est le prix de* 36 *mètres à* $\frac{5}{8}$?

30^m à $\frac{6}{8}$ ayant coûté..... 180^f.

1^m à $\frac{6}{8}$ coûterait le 30e de 180 francs, ou..... 6^f.

1^m à $\frac{1}{8}$ coûterait le 6e de 6 francs, ou..... 1^f.

1^m à $\frac{5}{8}$ coûterait 5 fois 1 franc, ou..... 5^f.

Les 36^m *à* $\frac{5}{8}$ *coûtent donc*, 36 *fois* 5 *francs, ou*..... 180^f.

132. *Trente mètres de drap de première qualité à* $\frac{9}{12}$ *coûtent* 720 *francs. Quel doit être le prix de* 50 *mètres de drap de seconde qualité à* $\frac{8}{12}$? *On suppose que la seconde qualité est les* $\frac{15}{16}$ *de la première, c'est-à-dire que, tout étant égal d'ailleurs, le prix du mètre de seconde qualité est les* $\frac{15}{16}$ *du prix du mètre de première qualité.*

30^m de première qualité à $\frac{9}{12}$, coûtant..... 720^f.

1^m de première qualité à $\frac{9}{12}$, coûte le 30e de 720 francs, ou... 24^f.

1^m de première qualité à $\frac{1}{12}$, coûte le 9e de 24 fr., ou $\frac{24}{9}$ fr., ou $\frac{8^f}{3}$.

1^m de première qualité à $\frac{8}{12}$, coûte 8 fois $\frac{8}{3}$ francs, ou..... $\frac{64^f}{3}$.

1^m de seconde qualité à $\frac{8}{12}$, coûte les $\frac{15}{16}$ de $\frac{64}{3}$ francs, ou.... 20^f.

Les 50^m *de seconde qualité à* $\frac{8}{12}$, *coûteront donc* 50 *fois* 20 francs, ou 1000^f.

133. *Quatre ouvriers ont fait vingt mètres d'ouvrage. Combien neuf ouvriers en feront-ils?*

4 ouvriers ayant fait..... 20m.
1 ouvrier ferait le quart de 20m, ou..... 5m.
Les 9 *ouvriers feront donc*, 9 *fois* 5m, ou.. 45m.

134. *Deux ouvriers, qui travaillent* 3 *heures par jour, ont fait en* 5 *jours*, 90 *mètres d'ouvrage. Combien* 3 *ouvriers, qui travailleraient* 7 *heures par jour, feraient-ils du même ouvrage, en deux jours?*

2 ouvriers, travaillant 3 heures par jour, font en 5 jours.. 90m
1 ouv. travaill. 3 heures par jour, fait en 5 j., la moitié de 90m, ou 45m
1 ouv. travaill. 1 heure par jour, fait en 5 j., le tiers de 45m, ou 15m
1 ouv. travaill. 1 heure par jour, fait en 1 j., le 5e de.... 15m, ou 3m
3 ouv. travaill. 1 heure par jour, feront en 1 jour, 3 fois 3m, ou 9m
3 ouv. travaill. 7 heures par jour, feront en 1 jour, 7 fois 9m, ou 63m
Les 3 *ouv. trav.* 7 *heur. par jour, feront en* 2 *jours*, 2 *fois* 63m, ou 126m.

135. *Deux ouvriers, qui travaillent* 3 *heures par jour, ont fait en* 5 *jours*, 90 *mètres d'ouvrage. On demande combien il faudra de jours à* 3 *ouvriers, qui travaillent* 7 *heures par jour, pour faire* 126 *mètres du même ouvrage.*

90m sont faits par 2 ouv., travaill. 3 h. par j., pendant 5 jours.
1m sera fait par 2 ouv., travaill. 3 h. par j., pendant $\frac{5}{90}$ j. ou $\frac{1}{18}$ j.
1m sera fait par 1 ouv., travaill. 3 h. par j., pendant $\frac{2}{18}$ j. ou $\frac{1}{9}$ j.
1m sera fait par 1 ouv., travaill. 1 h. par j., pendant $\frac{3}{9}$ j. ou $\frac{1}{3}$ j.
126m seront faits par 1 ouv., travaill. 1 h. par j., pendant $\frac{126}{3}$ j. ou 42 j.
126m seront faits par 3 ouv., travaill. 1 h. par j., pendant $\frac{42}{3}$ j. ou 14 j.

Les 126 *mètres seront donc faits par* 3 *ouvriers, travaillant* 7 *heures par jour, pendant le* 7e *de* 14 *jours, ou* 2 *jours.*

Règles de Compagnie ou de Société.

136. *Les mises de trois associés sont* 300 *francs*, 500 *francs et* 700 *francs; le gain total est* 4500 *francs. On demande le gain de chaque associé.*

Si le gain de 1 franc était connu, il suffirait de le multiplier par le nombre de francs de chaque mise, pour obtenir les gains demandés. Mais la somme des mises est 1500 francs; on peut donc dire :

Le gain de 1500 francs, étant..... 4500f.
Le gain de 1 franc, sera le 1500e de 4500 francs, ou... 3f.
Le gain de 300 francs, sera 300 fois 3 francs, ou..... 900f.
Le gain de 500 francs, sera 500 fois 3 francs, ou..... 1500f.
Le gain de 700 francs, sera 700 fois 3 francs, ou..... 2100f.

Mise totale 1500 francs. Gain total... 4500f.

Les gains des associés sont donc, 900 *francs*, 1500 *francs* et 2100 *francs*. Toutes les conditions du problème sont remplies, car la somme des gains est égale au gain total, et le gain total étant triple de la mise totale, les gains sont triples des mises.

137. *Les mises de trois associés sont* 100 *francs*, 250 *francs et* 50 *francs. La première mise est restée* 3 *mois dans la société, la seconde* 2 *mois et la troisième* 14 *mois. Le gain total est* 4500 *francs. Quel est le gain relatif à chaque mise?* Le gain de chaque associé dépend de sa mise et du temps qu'elle est restée dans la société. Si toutes les mises étaient restées le même temps, les gains seraient faciles à déterminer (nº 136). Il est donc naturel de *chercher quelles doivent être les mises, pour que restant le même temps dans la société, elles procurent les gains demandés*. Or, avec un peu d'attention, on voit que 100 francs placés pendant trois mois, doivent rapporter autant que 3 fois 100 francs ou 300 francs, en un mois. Par la même raison, 250 francs placés pendant 2 mois, et 50 francs placés pendant 14 mois, doivent rapporter autant que 2 fois 250 francs ou 500 francs, et 14 fois 50 francs ou 700 francs, pendant un mois. Les gains sont donc les mêmes que s'il s'agissait de résoudre cette question : *Les mises de trois associés sont* 300 *francs*, 500 *francs*, 700 *francs; le gain total est* 4500 *francs. Chaque mise est restée le même temps (un mois), dans la société. Il faut trouver le gain de chaque associé*. Les gains demandés sont, 900 francs, 1500 francs et 2100 francs (nº 136).

Règles d'intérêt.

138. L'argent rapportant un certain bénéfice à celui qui le fait valoir, l'homme qui emprunte une somme d'argent doit, en la rendant, y joindre une rétribution qui dédommage le prêteur des avantages que cette somme lui eût procurés, s'il l'avait employée par lui-même. Cette rétribution se nomme *intérêt*. Pour la déterminer, on convient de ce qu'une somme rapporte pendant un certain temps; l'intérêt d'une somme quelconque s'en déduit avec facilité. *Nous supposerons que le taux de l'intérêt de l'argent est connu*; nous verrons par la suite comment, dans chaque genre de spéculation, on peut le déduire du *calcul des probabilités*. On distingue deux sortes d'*intérêts*, l'intérêt simple et l'intérêt composé. L'*intérêt* SIMPLE *est celui qui ne porte plus intérêt; de sorte que l'intérêt d'un capital pendant plusieurs années, s'obtient en multipliant l'intérêt d'une année, par le nombre des années. Lorsqu'au contraire, l'intérêt de chaque année se joint au capital, pour porter lui-même intérêt pendant l'année suivante, comme on tire réellement les intérêts des intérêts, on dit que l'intérêt est* COMPOSÉ.

Quand le taux de l'argent est connu, toutes les questions relatives à l'intérêt de l'argent, se réduisent à quatre essentiellement différentes, car il s'agit toujours de trouver, ou ce que de l'argent comptant vaudra au

bout d'un certain temps, ou réciproquement, ce qu'une somme payable après un certain temps, vaut en argent comptant; et comme dans ces deux questions, l'intérêt peut être simple ou composé, il en résulte quatre problèmes. Mais, *la valeur d'une somme quelconque, composée de francs, peut s'obtenir en répétant la valeur d'un franc, autant de fois qu'il y a de francs.* On est donc conduit à résoudre les quatre problèmes suivans (nos 139, 143, 146, 150).

139. *On demande combien le capital 1 franc vaudra après un certain nombre d'années; le taux de l'argent est connu et l'on n'a égard qu'aux intérêts simples.* Pour fixer les idées, proposons-nous de *trouver la valeur de 1 franc après 3 ans, l'intérêt étant à 20 pour 100 par an* (*).

L'intérêt de 100 francs en un an, étant..... 20^f.

L'intérêt de 1 franc en un an, est $\frac{20}{100}$ franc, ou..... $\frac{1}{5}^f$.

L'intérêt de 1 franc en trois ans, est 3 fois $\frac{1}{5}$ franc, ou.. $\frac{3}{5}^f$.

Le capital 1 franc vaudra donc, après 3 ans, 1 franc plus son intérêt $\frac{3}{5}$ franc, ou..... $\frac{8}{5}^f$.

140. En général : *l'intérêt annuel de 100 francs, divisé par 100, donne pour quotient l'intérêt annuel de 1 franc; ce dernier intérêt, multiplié par le nombre d'années, donne l'intérêt de 1 franc pendant ce nombre d'années. Ajoutant l'intérêt au capital 1 franc, la somme exprime la valeur du capital 1 franc, au bout du temps donné. Pour obtenir la valeur d'un capital quelconque, après un certain temps, il suffit de multiplier la valeur de 1 franc après ce temps, par le nombre des francs du capital.*

141. 1er Exemple. *Combien 1500 francs argent comptant, vaudront-ils après trois ans?* L'intérêt de 1 franc est, $\frac{1}{5}$ franc par an et $\frac{3}{5}$ francs pour trois ans; 1 franc argent comptant, vaudra donc, après trois ans, 1 franc plus son intérêt $\frac{3}{5}$ francs, ou $\frac{8}{5}$ francs. *Les 1500 francs argent comptant, vaudront donc après trois ans, 1500 fois $\frac{8}{5}$ francs, ou 2400 francs.* L'intérêt de 1500 francs, pendant 3 ans, est donc 2400 francs moins 1500 francs, ou 900 francs. Et en effet; comme pour trois ans, l'intérêt de 1 franc est $\frac{3}{5}$ franc; l'intérêt des 1500 francs doit être 1500 fois $\frac{3}{5}$ francs, ou 900 francs.

(*) *Dans toutes les questions relatives à l'intérêt de l'argent* (du no 139 au no 152), *nous supposerons l'intérêt de l'argent à 20 pour 100 par an; de sorte que l'intérêt annuel sera le cinquième du capital.*

142. 2e Exemple. *Combien* 1500 *francs argent comptant, vaudront-ils après* 41 *mois ?* L'intérêt de 1 franc est, $\frac{1}{5}$ franc pour 12 mois, $\frac{1}{60}$ franc par mois et $\frac{41}{60}$ francs pour 41 mois. Le capital 1 franc vaut donc, après 41 mois, 1 franc plus son intérêt $\frac{41}{60}$ francs, ou $\frac{101}{60}$ fr.; le capital 1500 fr. vaut donc, après 41 mois, 1500 fois $\frac{101}{60}$ francs, ou 2525 francs.

143. *On propose de calculer combien une somme payable dans un certain nombre d'années, vaut en argent comptant. On n'a égard qu'aux intérêts simples.* La solution de ce problème n'offre aucune difficulté; car *une somme payable au bout d'un certain temps, étant le produit de la valeur de* 1 *franc après ce temps, par le nombre des francs du capital primitif* (n° 140); *si l'on divise une somme, payable au bout d'un certain temps, par la valeur de* 1 *franc après ce temps, le quotient exprimera le nombre des francs du capital primitif. La valeur de* 1 *franc, après le temps donné, s'obtient au moyen de la règle du n°* 140.

144. 1er Exemple. *Combien* 2400 *francs, payables dans trois ans, valent-ils argent comptant ?* Si l'on divise les 2400 francs, payables dans trois ans, par la valeur de 1 franc après trois ans, qui est $\frac{8}{5}$ franc (n° 141), le quotient, 2400 francs $\times \frac{5}{8}$, ou 1500 francs, exprimera que les 2400 *francs payables dans trois ans, valent* 1500 *francs argent comptant.*

145. 2e Exemple. *On demande combien* 2525 *francs, payables dans* 41 *mois, valent en argent comptant ?* Si l'on divise les 2525 francs, payables dans 41 mois, par la valeur de 1 franc après ce temps, qui est $\frac{101}{60}$ francs (n° 142); le quotient 1500, sera le nombre des francs du capital demandé (n° 143). De sorte que les 2525 francs, payables dans 41 mois, valent 1500 francs argent comptant.

Nous allons résoudre les mêmes questions, en ayant égard aux *intérêts des intérêts.*

146. *On voudrait découvrir combien le capital* 1 *franc vaudra après un certain nombre d'années, en ayant égard aux intérêts des intérêts.* L'argent étant à 20 pour 100 par an, l'intérêt annuel de 1 franc est $\frac{1}{5}$ franc. De sorte que 1 franc comptant, vaut après un an, 1 franc $+ \frac{1}{5}$ franc, ou $\frac{6}{5}$ franc, ou les $\frac{6}{5}$ de 1 franc. Ainsi, *le capital* 1 *franc, placé au commencement de la première année, vaut à la fin de cette année, les* $\frac{6}{5}$ *de* 1 *franc, c'est-à-dire les* $\frac{6}{5}$ *de ce qu'il valait au commencement de*

l'année. On voit donc que *pour trouver ce qu'une somme, placée au commencement d'une année, vaut à la fin de cette année, il suffit de la multiplier par* $\frac{6}{5}$. Les $\frac{6}{5}$ franc, placés au commencement de la 2e année, valent donc, à la fin de cette année, $\frac{6}{5}$ franc $\times \frac{6}{5}$; ces $\frac{6}{5}$ franc $\times \frac{6}{5}$, placés au commencement de la 3e année, valent à la fin de cette année..... $\frac{6}{5}$ franc $\times \frac{6}{5} \times \frac{6}{5}$, ou 1 franc $\times \frac{6}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{5}$, ou $\frac{216}{125}$ francs.

147. La loi des accroissemens du capital 1 franc est évidente. On en déduit cette règle générale : *Pour obtenir la valeur du capital 1 franc, après un certain nombre d'années; calculez la fraction qui exprime combien 1 franc argent comptant vaut à la fin de l'année, et multipliez le capital 1 franc, par cette fraction abstraite, autant de fois facteur qu'il y a d'unités dans le nombre des années; le produit sera la valeur de 1 franc après le temps donné. Pour trouver la valeur d'un capital quelconque après un certain temps, il suffit de multiplier la valeur de 1 franc après ce temps, par le nombre des francs du capital.*

148. 1er Exemple. *Combien 1500 francs argent comptant, vaudront-ils après trois ans?* Comme 1 franc argent comptant, vaut, après trois ans, $\frac{216}{125}$ francs (n° 146)), *les 1500 francs argent comptant, vaudront, après trois ans, 1500 fois* $\frac{216}{125}$ *francs, ou 2592 francs.* En voici la *preuve.* L'argent est à 20 pour 100 par an; l'intérêt annuel est donc le cinquième du capital; les 1500 francs placés au commencement de la 1re année, valent donc, à la fin de cette année, 1500 francs, plus leur intérêt 300 francs, ou 1800 francs; les 1800 francs placés au commencement de la 2e année, valent à la fin de cette année, 1800 francs, plus leur intérêt 360 francs, ou 2160 francs; enfin, les 2160 francs, placés au commencement de la 3e année, valent à la fin de cette année, 2160 francs plus leur intérêt 432 francs, ou 2592 francs. Puisque 1500 francs, argent comptant, valent, après 3 ans, 2592 francs; l'augmentation du capital 1500 francs, est de 1092 francs pour 3 ans, en ayant égard aux intérêts des intérêts. Mais, l'augmentation due aux intérêts simples ne serait que de 900 francs (n° 141). *On voit donc combien il est avantageux à celui qui place des fonds, d'avoir égard aux intérêts des intérêts, c'est-à-dire, de retirer chaque année l'intérêt pour le joindre au capital. La règle du n° 147, s'applique également à des années, à des mois, à des jours,* etc.

149. 2e Exemple. *On voudrait trouver combien 1500 francs, argent comptant, vaudront, après 3 ans 5 mois.* L'intérêt de 1 franc est, de $\frac{1}{5}$ franc pour 12 mois, de $\frac{1}{60}$ franc pour un mois, de $\frac{5}{60}$ franc, ou $\frac{1}{12}$ franc, pour 5 mois. Par conséquent, 1 franc payable à une époque quelconque, vaut,

5 mois plus tard, 1 franc $+ \frac{1}{12}$ franc, ou $\frac{13}{12}$ francs; donc, 1 franc, payable dans 3 ans, vaudra, dans 3 ans 5 mois, $\frac{13}{12}$ francs; mais 1 franc, argent comptant, vaut, après 3 ans, $\frac{216}{125}$ francs (n° 146); ces $\frac{216}{125}$ francs, payables dans 3 ans, vaudront donc, dans 3 ans 5 mois, les $\frac{216}{125}$ de $\frac{13}{12}$ francs, ou $\frac{234}{125}$ francs. Puisque 1 franc argent comptant vaut, après 3 ans 5 mois, $\frac{234}{125}$ francs; *les* 1500 *francs argent comptant, vaudront, dans* 3 *ans* 5 *mois*, 1500 *fois* $\frac{234}{125}$ *francs, ou* 2808 *francs.*

150. *On demande combien une somme, payable dans un certain nombre d'années, vaut argent comptant, en ayant égard aux intérêts des intérêts.* D'après ce qu'on a vu (n° 143), *si l'on divise la somme, qui est payable au bout d'un certain temps, par la valeur de* 1 *franc après ce temps, le quotient exprimera le nombre des francs du capital primitif. La valeur de* 1 *franc après le temps donné, s'obtient au moyen de la règle du n°* 147.

151. 1er Exemple. *Combien* 2592 *francs, payables dans* 3 *ans, valent-ils en argent comptant?* Si l'on divise les 2592 francs, payables dans 3 ans, par la valeur de 1 franc, après trois ans, qui est $\frac{216}{125}$ francs (n° 146), le quotient $2592 \times \frac{125}{216}$, ou 1500, sera le nombre des francs du capital primitif; les 2592 *francs, payables dans* 3 *ans, valent donc* 1500 *francs argent comptant.*

152. 2e Exemple. *Calculer combien* 2808 *francs, payables dans* 3 *ans* 5 *mois, valent en argent comptant.* On divisera les 2808 francs, payables dans 3 ans 5 mois, par la valeur de 1 franc après ce temps, qui est $\frac{234}{125}$ francs (n° 149); le quotient $2808 \times \frac{125}{234}$ ou 1500, indiquera que *les* 2808 *francs, payables dans* 3 *ans* 5 *mois, valent* 1500 *francs argent comptant.*

153. *On propose d'évaluer, en argent comptant, deux sommes, l'une de* 6000 *francs, payable dans* 25 *mois, l'autre de* 27000 *francs, payable dans* 4 *mois. L'intérêt simple de l'argent est à* 2 *pour* 100 *par mois.* L'intérêt de 100 francs est, pour 1 mois, de 2 francs, pour 25 mois, de 50 francs, et pour 4 mois, de 8 francs. Donc, 100 *francs comptant, valent,* 150 *francs après* 25 *mois, et* 108 *francs après* 4 *mois.* Cela posé:

Puisque 150 francs, payables dans 25 mois, valent comptant 100 francs, 1 franc, payable dans 25 mois, vaut comptant $\frac{100}{150}$ francs, ou .. $\frac{2}{3}$ francs. Les 6000 francs, payables dans 25 mois, valent donc, en argent comptant

6000 fois $\frac{2}{3}$ francs, ou 4000 francs. On trouvera de même que les 27000 francs, payables dans 4 mois, valent 25000 francs comptant. Ainsi, l'*argent étant à 2 pour 100 par mois, deux sommes, l'une de 6000 francs, payable dans 25 mois, l'autre de 27000 francs, payable dans 4 mois, valent 4000 francs et 25000 francs, argent comptant; ce qui diminue chaque somme de 2000 francs.* Cette diminution prend quelquefois le nom d'*escompte*.

154. *Un militaire, qui a besoin d'argent comptant, se présente chez un banquier avec deux lettres de change, l'une de 6000 francs, payable dans 25 mois, l'autre de 27000 francs, payable dans 4 mois. Le banquier prend un intérêt ou* ESCOMPTE *de 2 pour 100 par mois. Combien le banquier doit-il donner au militaire? On n'a égard qu'aux intérêts simples.* Ce problème ne diffère du précédent que par la forme de l'énoncé. *Chaque lettre de change éprouvera donc une perte ou escompte de 2000 francs; le militaire recevra donc, 4000 francs + 25000 francs, ou 29000 francs.*

Voici une *solution plus directe*. L'escompte de 100 francs est, pour un mois, de 2 francs, pour 25 mois, de 50 francs, et pour 4 mois, de 8 francs. De sorte que 100 francs comptant valent, 150 francs après 25 mois, et 108 francs après 4 mois. Deux lettres de change, l'une de 150 francs, payable dans 25 mois, l'autre de 108 francs, payable dans 4 mois, ne vaudraient donc chacune que 100 francs comptant; les *escomptes* relatifs à ces lettres de change seraient donc 50 francs et 8 francs. La solution du problème se déduit de cette remarque. En effet; puisque pour 25 mois.....

L'escompte de 150 francs est..... 50 francs.

L'escompte de 1 franc sera $\frac{50}{150}$ francs, ou..... $\frac{1}{3}$ franc.

L'escompte de 6000 francs sera donc $\frac{6000}{3}$ francs, ou..... 2000 francs.

On verra de même que l'escompte des 27000 francs est .....

27000 fois $\frac{2}{27}$ francs, ou..... 2000 francs.

155. *Un certain capital, augmenté des intérêts simples, valait 1235 francs après 5 mois, et 1312 francs après 16 mois. Il faut découvrir quel était le capital et le taux de l'argent.* Comme le capital primitif valait, 1235 francs après 5 mois, et 1312 francs après 16 mois, il s'est accru de 77 francs en 11 mois, ou de 7 francs en un mois, ou de 35 francs en 5 mois; mais, après cet accroissement, il vaut 1235 francs; le capital primitif était donc 1200 francs. On en déduit le taux de l'argent, car l'intérêt de 1200 francs étant de 35 francs pour 5 mois, ou de 7 francs pour un mois; 1200 francs rapportent 84 francs par an. L'intérêt de 100 francs par an, est donc 7 francs. Ainsi, l'*argent était à 7 pour 100 par an*. Et en effet; lorsque l'argent est à ce taux, on trouve que 1200 francs argent comptant valent, 1235 francs après 5 mois, et 1312 francs après 16 mois (n° 140), comme l'exige la question.

156. *Un particulier, qui doit une rente perpétuelle de 2200 francs,*

au capital de 11000 *francs, voudrait acquitter en* 2 *ans, la rente et le capital, au moyen de deux paiemens égaux effectués à la fin de chaque année. Quelle doit être la valeur de chaque paiement? On a égard aux intérêts des intérêts.* La rente, 2200 francs, étant le 5e du capital, 1 franc placé au commencement d'une année, vaut à la fin de cette année, 1 franc $+\frac{1}{5}$ franc, ou 1 franc $\times \frac{6}{5}$; les 11000 francs comptant vaudront donc (nº 147), 11000 francs $\times \frac{6}{5} \times \frac{6}{5}$, ou 15 840 francs, à la fin de la 2e année; les deux paiemens réunis, évalués à cette dernière époque, doivent donc valoir 15 840 francs. Mais, le 1er paiement, effectué à la fin de la 1re année, vaut à la fin de la 2e, les $\frac{6}{5}$ de sa valeur; le 2e paiement, effectué à la fin de la 2e année, vaut à cette époque les $\frac{5}{5}$ de sa valeur; les deux paiemens réunis, évalués à la fin de la 2e année, valent donc les $\frac{6}{5}$ plus les $\frac{5}{5}$, ou les $\frac{11}{5}$ du 1er paiement. Les $\frac{11}{5}$ du 1er paiement sont donc 15 840 francs; le 5e du 1er paiement est donc $\frac{15840}{11}$ francs ou 1440 francs; le premier paiement est donc, 5 fois 1440 francs, ou 7200 francs. *On acquittera donc la rente et le capital, au moyen de deux paiemens de* 7200 *francs chacun, effectués l'un à la fin de la première année, l'autre à la fin de la seconde.* Et en effet; le premier paiement, effectué à la fin de la 1re année, est 7200 francs; on doit 2200 francs pour la rente des 11000 francs; on n'acquitte donc réellement que 5000 francs, sur le capital 11000 francs, qui par là se trouve réduit à 6000 francs; ainsi, on ne doit tenir compte, pendant la seconde année, que de l'intérêt 1200 francs, des 6000 francs, qui restent dus; cet intérêt, joint aux 6000 francs, donne 7200 francs, pour ce qui reste dû à la fin de la 2e année; le second paiement, de 7200 francs, effectué à cette époque, acquitte donc le reste de la dette.

157. *On propose d'acquitter* 3310 *francs, en trois paiemens égaux effectués à la fin de chaque année; l'argent est à* 10 *pour* 100 *par an, et l'on a égard aux intérêts des intérêts.* Si l'on raisonne comme dans l'exemple précédent, on trouvera que *chaque paiement doit être de* 1331 *francs.*

158. *On offre à un marchand,* 30 *mètres d'un drap de première qualité à* $\frac{9}{12}$, *pour* 720 *francs argent comptant; ou* 50 *mètres d'un drap de seconde qualité à* $\frac{8}{12}$, *pour* 1200 *francs payables dans deux ans. La seconde qualité de drap est les* $\frac{15}{16}$ *de la première; l'argent est à* 10 *pour* 100 *par an, et l'on a égard aux intérêts des intérêts. Le marchand*

demande quelle est la spéculation qui lui sera la plus avantageuse. Pour résoudre ce problème, il faut chercher quel serait, aux conditions du premier marché, le prix des 50 mètres de drap de seconde qualité à $\frac{8}{12}$; ce prix, comparé à celui qui résulte du second marché, fera connaître la spéculation la plus avantageuse. Effectuons les calculs :

Aux conditions du premier marché; 30^m de drap de première qualité à $\frac{9}{12}$, coûtent 720 francs comptant ; mais, la deuxième qualité est les $\frac{15}{16}$ de la première ; 50^m de drap de seconde qualité à $\frac{8}{12}$, coûtent donc, 1000 francs argent comptant (n° 132), ou 1210 francs payables dans deux ans. Ainsi, 50 mètres de drap de seconde qualité à $\frac{8}{12}$, payables dans deux ans, coûtent au marchand, 1210 francs aux conditions du premier marché et 1200 francs aux conditions du second marché. *La seconde spéculation est donc la plus avantageuse au marchand.*

159. Les tables, placées à la fin de ce volume, donnent le moyen de résoudre toutes les questions relatives aux *changes étrangers*. Par exemple, pour *calculer combien* 15000 *francs*, *valent de guinées anglaises*, on dira : 100 *guinées anglaises*, valent 2626 *francs* ; un franc vaut donc $\frac{100}{2626}$ guinées; les 15000 francs valent donc, 15000 fois $\frac{100}{2626}$ guinées, ou 571 guinées, 21 etc.

Cent PIASTRES *d'Espagne*, *valent* 529 FRANCS *de France*, *et* 1161 *francs*, *valent* 100 DUCATS *de Hollande. On demande combien* 3483 *piastres, valent de ducats?* D'après cet énoncé, une *piastre* vaut $\frac{529}{100}$ francs et un franc vaut $\frac{100}{1161}$ ducats. La *piastre* vaut donc les $\frac{529}{100}$ de $\frac{100}{1161}$ ducats, ou $\frac{529}{1161}$ ducats. *Les* 3483 *piastres valent donc*, 3483 *fois* $\frac{529}{1161}$ *ducats*, ou 1587 *ducats.*

On calculerait de même combien l'unité de monnaie de l'un quelconque des pays désignés, vaut en monnaie des autres pays, car ayant trouvé que

$$1^{\,piastre} = \frac{529}{100}^{\,francs} = \frac{529}{1161}^{\,ducats} \text{ ; on en déduit que....}$$

$$1^{\,franc} = \frac{100}{529}^{\,piastres} = \frac{100}{1161}^{\,ducats} \text{ et que, } 1^{\,ducat} = \frac{1161}{100}^{\,francs} = \frac{1161}{529}^{\,piast.}$$

Deux marchands se réunissent, pour échanger des marchandises ; ils conviennent de donner, 2 mètres de drap, pour 3 mètres de casimir, ou 5 mètres de casimir en échange de 7 mètres de basin. Combien faudra-t-il donner de mètres de basin, pour 60 mètres de drap ?

2^m de drap en valent 3 de casimir et 5^m de casimir en valent 7 de basin. Donc

1^m de drap vaut.... $\frac{3^m}{2}$ de casimir et 1^m de casimir vaut... $\frac{7^m}{5}$ de basin.

1^m de drap vaut donc, $\frac{3^m}{2}$ de casimir, ou les $\frac{3}{2}$ de $\frac{7^m}{5}$ de basin, ou $\frac{21^m}{10}$ de basin.

les 60^m *de drap valent donc*, 60 fois $\frac{21^m}{10}$, ou 126 *mètres de basin.*

160. La règle que l'on donnait pour résoudre les problèmes du n° 159 était connue sous le nom de *Règle conjointe.*

Rapports et Proportions.

161. *Remarque.* Dans tous les traités d'Arithmétique, les solutions des problèmes précédens, étaient fondées sur la *théorie des rapports et des proportions.* J'ai cherché à faire voir, que *la combinaison des quatre règles, suffit pour résoudre toutes les questions de l'Arithmétique*, ce qui offre le double avantage d'exercer le jugement, et d'éviter des théories obscures et compliquées. Je me bornerai donc à donner une idée des rapports et des proportions.

162. Le nombre 3 étant les $\frac{3}{4}$ de 4, on exprime qu'une quantité est les $\frac{3}{4}$ d'une autre quantité, en disant que la première est à la seconde dans le *rapport* de 3 à 4, ou *comme* 3 *est à* 4; ce qui signifie, que la première quantité, contient autant de fois la seconde, que le premier nombre 3 contient le second 4, c'est-à-dire $\frac{3}{4}$ de fois; ou que le quotient de la première quantité par la seconde est $\frac{3}{4}$, comme celui de 3 par 4. Les nombres 3 et 4, sont les deux *termes* du *rapport.* Et en général, *le* RAPPORT *entre deux quantités, est le quotient de la division de la première quantité par la seconde.* On peut donc faire sur les deux termes d'un rapport, sans en changer la valeur, toutes les opérations qu'on ferait sur un dividende et sur un diviseur, sans changer le quotient.

163. Ainsi, *un rapport ne change pas, lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise ses deux termes, par un même nombre.* Le *rapport* de 2 à 3 est donc le même que celui de 20 à 30. On dit, par cette raison, que.....

2 *est à* 3 *comme* 20 *est à* 30.

L'ensemble de ces quatre *termes*, se nomme *proportion.*

164. En général : *l'égalité des deux rapports, forme une proportion.* La *proportion*,

2 *est à* 3 *comme* 20 *est à* 30,

exprime que $\frac{2}{3} = \frac{20}{30}$.

Les nombres 2 et 3, sont l'*antécédent* et le *conséquent* du 1er rapport; 20 et 30, sont l'*antécédent* et le *conséquent* du 2e rapport; 2 et 30 se nomment les *extrêmes*; 3 et 20 sont les *moyens*. Deux points ainsi placés : signifient *est à*, et quatre points ainsi disposés :: signifient *comme*. De sorte que la proportion précédente s'écrit...

$$2 : 3 :: 20 : 30.$$

Cela exprime que.....

2 divisé par 3 est égal à 20 divisé par 30.

Les rapports $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{14}{21}$, étant égaux, on écrit.....

$$2 : 3 :: 4 : 6 :: 14 : 21.$$

Cela signifie que

2 est à 3, comme 4 est à 6, comme 14 est à 21.

165. *Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens*, car la *proportion*...

$$2 : 3 :: 20 : 30, \text{ exprimant, que } \frac{2}{3} = \frac{20}{30},$$

si l'on réduit ces fractions au même dénominateur, 3×30, les numérateurs 2×30, 20×3, seront nécessairement égaux.

166. Réciproquement, *lorsque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, la proportion est exacte*, car l'égalité....

$2 \times 30 = 20 \times 3$, donnant $\frac{2 \times 30}{3 \times 30} = \frac{20 \times 3}{3 \times 30}$, ou $\frac{2}{3} = \frac{20}{30}$; on a, $2:3::20:30$.

Cette dernière proportion peut prendre ces huit formes....

$2 : 3 :: 20 : 30$, $2 : 20 :: 3 : 30$, $30 : 3 :: 20 : 2$, $30 : 20 :: 3 : 2$,
$3 : 2 :: 30 : 20$, $3 : 30 :: 2 : 20$, $20 : 2 :: 30 : 3$, $20 : 30 :: 2 : 3$,

car, dans chacune de ces proportions, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

167. *Connaissant les trois premiers termes d'une proportion, on peut toujours en déduire le quatrième terme, car ce quatrième terme est égal au produit des moyens, divisé par l'extrême connu.* En effet; si les trois premiers termes d'une proportion étant 2, 3 et 20, on désigne le quatrième terme, par x, on aura.....

$$2 : 3 :: 20 : x;$$

d'où (n° 165), $2 \times x = 3 \times 20$;

3×20 étant le produit de 2 par x; en divisant le produit 3×20, par le facteur 2, le quotient $\frac{3 \times 20}{2}$, sera égal au second facteur x. Ce qui démontre le principe énoncé.

Quand on réfléchit sur la nature des rapports qui existent entre les et les effets qu'elles déterminent, on s'aperçoit qu'il en est de deux s. Par exemple, un ouvrier fait d'autant *plus* d'ouvrage qu'il a *plus* ce; donc, *les ouvrages faits par deux ouvriers, dans les mêmes stances, sont dans le rapport de leurs forces.* Au contraire, *plus* rain est dur, *moins* est grande la quantité d'ouvrage qu'on y fait; *les quantités d'ouvrage faites dans deux terrains différens, tout d'ailleurs égal, sont d'autant moindres que les duretés de ces ins sont plus grandes.* Dans le premier cas, on dit que les ouvrages ont dans le *rapport direct* des forces des ouvriers, et dans le second, s ouvrages faits sont dans le *rapport inverse* des duretés des terrains.

. En général : *Un rapport est* DIRECT, *quand le plus grand effet d à la plus grande cause, et un rapport est* INVERSE, *quand le petit effet répond à la plus grande cause. Une règle de trois est te ou inverse, suivant que les rapports que l'on y considère, sont ts ou inverses.* Les questions des n°s 127, 128 et 133, dépendent *ègles de trois directes*, et les problèmes des n°s 130, 134 et 135, t des exemples de *règles de trois inverses.*

s difficultés de deux ouvrages se mesurent par les temps employés re la même quantité de ces ouvrages. Ainsi, les duretés de deux ns étant comme 3 est à 4, les difficultés des ouvrages dans ces terrains temps employés pour faire la même quantité de ces ouvrages, sont comme 3 est à 4. Conséquemment, si l'on emploie 3 heures à faire ètre du premier ouvrage, il faudra employer 4 heures pour faire un e du second ouvrage. Les ouvrages faits en une heure, dans les deux ns, sont donc $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ de mètre. De sorte que, les difficultés de deux ges étant comme 3 est à 4, les ouvrages correspondans sont comme $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$, ou comme $\frac{12}{3}$ est à $\frac{12}{4}$, ou enfin comme 4 est à 3.

. On voit donc que, *pour passer d'un rapport* INVERSE, *au rapport* CT *correspondant, il suffit de changer l'ordre des termes du premier ort*, et réciproquement.

. Les solutions de la plupart des problèmes précédens peuvent se ire de la *théorie des rapports*; mais pour éviter des répétitions inutiles, ne considérerons qu'un problème de chaque espèce.

ns le n° 127, où l'on voulait *trouver le prix de 5 mètres de drap, 2 mètres coûtant 48 francs*, on observe que les prix étant propor- els aux nombres de mètres; comme 5 est les $\frac{5}{12}$ de 12, le prix des ètres est les $\frac{5}{12}$ du prix 48 francs de 12 mètres; c'est-à-dire 20 francs.

ans le n° 128, il s'agissait de *trouver combien on aurait de mètres*

de drap pour 20 francs, les 12 mètres coûtant 48 francs. Les nombres de mètres de drap étant proportionnels aux prix; comme 20 est les $\frac{5}{12}$, ou les $\frac{5}{12}$, de 48, pour 20 francs, on aura les $\frac{5}{12}$ de ce qu'on a pour 48 francs, c'est-à-dire les $\frac{5}{12}$ de 12 mètres, ou 5 mètres.

Dans le n° 133, où l'on proposait de *trouver l'ouvrage de 9 ouvriers, lorsque 4 ouvriers font 20 mètres ;* on dira : les ouvrages sont proportionnels aux nombres d'ouvriers; mais 9 est les $\frac{9}{4}$ de 4; l'ouvrage de 9 ouvriers sera donc les $\frac{9}{4}$ des 20 mètres faits par 4 ouvriers, c'est-à-dire 45 mètres.

Dans le n° 130, *on demande combien il faut prendre de mètres de toile à* $\frac{5}{8}$, *pour doubler 30 mètres de drap à* $\frac{6}{8}$, on dira : pour couvrir une surface donnée, il faut d'autant plus de mètres de toile que la toile est moins large; par conséquent, *pour former la même surface, les nombres de mètres doivent être en raison inverse de leurs largeurs ;* or, les largeurs de la toile et du drap sont comme $\frac{5}{8}$ est à $\frac{6}{8}$, ou comme 5 est à 6; donc pour couvrir la même surface, les nombres de mètres de toile et de drap doivent être dans le rapport inverse de 5 à 6, c'est-à-dire comme 6 est à 5 (n° 170); mais 6 est les $\frac{6}{5}$ de 5; la quantité de toile demandée est donc les $\frac{6}{5}$ de 30 mètres, ou 36 mètres.

172. On propose de *partager* 35, *en deux parties proportionnelles aux nombres* 3 *et* 4. Si le nombre à partager était $3+4$, ou 7, la première partie serait 3 et la deuxième serait 4. Si le nombre à partager était le 7e de 7, ou 1, les parties, devant conserver le même rapport, seraient 7 fois plus petites, c'est-à-dire $\frac{3}{7}$ et $\frac{4}{7}$. Or, le nombre à partager est 35 fois 1, les parties sont donc, 35 fois $\frac{3}{7}$ et 35 fois $\frac{4}{7}$, c'est-à-dire 15 et 20. *Ces parties satisfont à toutes les conditions du problème*, car leur somme, compose le nombre 35 à partager, et 15 étant les $\frac{3}{4}$ de 20,

La 1ere partie : la 2e :: 3 : 4.

173. *Partager* 45, *en trois parties proportionnelles aux nombres* 3, 5, 7. D'après cet énoncé, la somme des trois parties est 45, et.....

La 1ere partie : la 2e :: 3 : 5.
La 1ere partie : la 3e :: 3 : 7.
La 2e partie : la 3e :: 5 : 7.

La dernière proportion n'est qu'une conséquence des deux autres, car en vertu des deux premières proportions,

La 2e partie est les $\frac{5}{3}$ de la 1ere,

La 3e partie est les $\frac{7}{3}$ de la 1ere.

Donc, la 2e partie : la 3e :: $\frac{5}{3}$: $\frac{7}{3}$ :: 5 : 7.

Cela posé; si le nombre à partager était.....

$3 + 5 + 7$, ou 15; les parties seraient 3, 5, 7.

Si le nombre à partager était.....

Le 15e de 15, ou 1, les parties seraient $\frac{3}{15}$, $\frac{5}{15}$, $\frac{7}{15}$.

Le nombre à partager étant.....

45, ou 45 fois 1, les parties seront, $\frac{3}{15} \times 45$, $\frac{5}{15} \times 45$ et $\frac{7}{15} \times 45$;

c'est-à-dire 9, 15 et 21. *Ces parties jouissent des propriétés demandées*; car leur somme est 45 et en les divisant par 3, ce qui ne change pas leurs rapports (nº 163), les quotiens sont 3, 5, 7. De sorte que.....

9 : 15 : 21 :: 3 : 5 : 7.

174. *Partager* 78, *en trois parties telles, que la* 1re *soit à la* 2e, *comme* 2 *est à* 3 *et que la* 1re *soit à la* 3e, *comme* 5 *est à* 7. Pour ramener cette question à la précédente, il suffit de chercher quelles seraient les parties, si la 1re était l'unité. Or, d'après l'énoncé, la 2e partie est les $\frac{3}{2}$ de la 1re et la 3e est les $\frac{7}{5}$ de la 1re. Par conséquent, si la 1re partie était 1, la 2e serait $\frac{3}{2}$ et la 3e serait $\frac{7}{5}$; les parties demandées doivent donc être proportionnelles aux nombres 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$. Pour simplifier, on multipliera ces nombres par 2×5, ce qui ne changera pas leurs rapports, et la question sera réduite à *partager* 78, *en trois parties proportionnelles aux nombres* 10, 15 et 14. Raisonnant comme dans le nº 173, on trouvera que les parties demandées sont, 20, 30 et 28. *Ces parties satisfont à toutes les conditions du problème*, car leur somme est le nombre 78 à partager, et

La 1ere partie : la 2e :: 20 : 30 :: 2 : 3.
La 1ere partie : la 3e :: 20 : 28 :: 5 : 7.

175. *Un homme laisse, en mourant, 7800 francs à sa femme enceinte, à condition que, si elle a un fils, elle prendra 3120 francs et le fils le reste, 4680 francs; et que, si elle a une fille, la mère prendra 3250 francs et la fille le reste, 4550 francs. Elle accouche d'un fils et d'une fille. Il s'agit de découvrir comment on peut satisfaire aux volontés du testateur.* Puisque la somme 7800 francs, qui devait n'être partagée qu'entre deux personnes, doit l'être entre trois, les parties ne peuvent plus être les mêmes. On doit donc chercher trois parts qui conservent entre elles les rapports énoncés dans le testament, et dont la somme compose l'héritage 7800 francs. Mais,

La part de la mère est à celle du fils....

$$:: 3120 : 4680 :: 2 \times 1560 : 3 \times 1560 :: 2 : 3.$$

La part de la mère est à celle de la fille....

$$:: 3250 : 4550 :: 5 \times 650 : 7 \times 650 :: 5 : 7.$$

Par conséquent, si l'on considère les parts de la mère, du fils et de la fille, comme la 1ere, la 2e et la 3e, la question sera réduite à *partager 7800 francs en trois parties telles, que la 1ere soit à la 2e, comme 2 est à 3, et que la 1ere soit à la 3e comme 5 est à 7.* Ces parties sont 2000 francs, 3000 francs et 2800 francs (n° 174). Elles expriment les parts respectives, de la mère, du fils et de la fille. Ces parts satisfont à toutes les conditions du problème, car leur somme compose l'héritage 7800 francs; la part de la mère est les $\frac{2}{3}$ de celle du fils, comme 3120 francs est les $\frac{2}{3}$ de 4680 francs, et la part de la mère est les $\frac{5}{7}$ de celle de la fille, comme 3250 francs est les $\frac{5}{7}$ de 4550 francs.

176. *Un premier ouvrier, qui travaille dans un premier terrain, fait en 36 heures, 288 mètres d'ouvrage; un second ouvrier, qui travaille dans un second terrain, fait en 24 heures, 96 mètres d'ouvrage. La dureté du premier terrain est à celle du second, comme 3 est à 4. On demande quel est le rapport des forces des deux ouvriers.* Les duretés des terrains étant comme 3 est à 4, les ouvrages correspondans sont comme 4 est à 3 (n° 170). Mais, 3 est les $\frac{3}{4}$ de 4; l'ouvrage fait dans le second terrain est donc les $\frac{3}{4}$ de l'ouvrage fait dans le premier. Cela posé.....

Le premier ouvrier, en 36 heures, dans le premier terrain, fait	288^m.
Le prem. ouvr., en 1 h. dans le prem. terr., fait le 36e de 288^m, ou	8^m.
Le prem. ouvr., en 1 h. dans le 2e terrain, fait les $\frac{3}{4}$ de 8^m, ou...	6^m.
Le prem. ouvr., en 24 h. dans le 2e terrain, fait 24 fois 6^m, ou..	144^m.
Le 2e ouvr., en 24 h. dans le 2e terrain, fait.....	96^m.

Puisque, pendant le même temps et dans le même terrain, le premier ouvrier fait 144 mètres, et le second 96 mètres, *la force du premier ouvrier est à celle du second*, comme 144 est à 96, ou comme 48×3 est à 48×2, ou *comme* 3 *est à* 2.

PROBLÈMES AMUSANS.

177. *Deux soldats dînaient ensemble ; l'un avait fourni cinq plats et l'autre trois. Un étranger les prie de l'admettre à leur table, avec la promesse de payer sa part. Il donne* 8 *francs pour son écot ; le propriétaire des* 3 *plats, prend* 3 *francs et donne* 5 *francs au propriétaire des* 5 *autres plats ; ce dernier prétend que le partage est injuste. Un officier décide que le maître des* 5 *plats doit avoir* 7 *francs, tandis que le maître des* 3 *plats ne doit prendre que* 1 *franc. Il s'agit de découvrir le motif de cette décision.*

Puisque l'étranger paie 8 francs, pour le tiers de l'écot ; l'écot total est de 24 francs, pour les 8 plats ; chaque plat coûte donc 3 francs ; le propriétaire des 5 plats doit donc prendre 15 francs ; mais il doit remettre 8 francs pour son écot ; il lui revient donc 7 francs. Le propriétaire des 3 plats doit prendre 9 francs et remettre 8 francs pour son écot ; il ne lui revient donc en effet qu'un franc.

178. *Un corps, plongé dans un vase qui contient* 100 *pintes d'eau, perd* 12lb *de son poids ; combien faut-il faire dissoudre de livres de sel, pour que le même corps, plongé dans l'eau salée, y perde* 19lb *de son poids ;* 100 *pintes d'eau douce, pèsent* 60lb. *On sait qu'un corps plongé dans un fluide y perd une partie de son poids, égale au poids du volume de fluide qu'il déplace. On suppose que le sel en se dissolvant dans l'eau, ne change pas le volume de l'eau.*

Comme le corps doit perdre 12lb de son poids dans l'eau douce, il déplace un volume d'eau douce dont le poids est 12lb. Ce volume est facile à déterminer, car

60lb exprimant le poids de 100 pintes d'eau douce,

1lb est le poids de, $\frac{100}{60}$ ou $\frac{5}{3}$, pintes,

12lb est le poids de 12 fois $\frac{5}{3}$ pintes, ou de 20 pintes.

Le corps déplace donc un volume d'eau douce de 20 pintes, dont le poids est 12lb. Pour que le poids des 20 pintes déplacées, devienne 19lb, il faut à ces 20 pintes, joindre 7lb de sel. Donc, sur les 100 pintes d'eau douce, que contient le vase, il faudra mettre, 5 fois 7lb ou 35 lb de sel.

179. *Un bassin est alimenté par deux fontaines ; la première coulant seule, le remplirait en* $\frac{3}{2}$ *heures et la seconde en* $\frac{3}{4}$ *d'heure. La totalité de l'eau que peut contenir ce bassin, sortirait en* 3 *heures par un*

troisième conduit. En combien de temps ce bassin, supposé vide, sera-t-il rempli, lorsque l'eau coulera par les trois ouvertures à la fois?

La première fontaine remplit, en $\frac{3}{2}$ heures une fois le bassin, en 3 heures 2 fois le bassin, et en une heure les $\frac{2}{3}$ du bassin. On verra de même qu'en une heure, la deuxième fontaine remplit les $\frac{4}{3}$ du bassin et que la troisième ouverture vide $\frac{1}{3}$ du bassin. Ainsi, quand l'eau coule par ces trois ouvertures à la fois, la partie du bassin qui se remplit en une heure, est $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3}$, ou $\frac{5}{3}$. Le bassin serait donc rempli 5 fois en 3 heures. *Le bassin sera donc rempli en $\frac{3}{5}$ d'heure, ou en 36 minutes.*

Remarque. *Si l'eau ne sortait pas du bassin*, les deux fontaines coulant ensemble, rempliraient par heure, les $\frac{2}{3}$ plus les $\frac{4}{3}$ du bassin, ou deux fois le bassin. *Le bassin serait donc rempli en une demi-heure.*

180. *Un courtier a payé des marchandises, qu'il revend pour* 753 francs *de plus qu'il ne les avait achetées. A ce marché, il gagne* 15 *pour* 100 *sur le prix de vente. Quel est le prix d'achat des marchandises?*

Le gain 15 francs, répondant au prix de vente 100 francs,

Le gain 1 franc, répond au prix de vente $\frac{100}{15}$ francs, ou $\frac{20}{3}$ francs.

Le gain 753 francs, répond au prix de vente, 753 fois $\frac{20}{3}$ francs, ou 5020 francs.

Le courtier a donc revendu ses marchandises pour 5020 francs. Le prix d'achat est donc 5020 francs — 753 francs, ou 4267 francs.

181. *Un homme laisse, la moitié de son bien à son fils, le tiers à sa fille, et les* 10 000 *francs qui restent à sa veuve. Il faut trouver le bien du défunt et la part de chaque enfant.* La part du fils, jointe à celle de la fille, composent $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, ou les $\frac{5}{6}$, de l'héritage. Les 10 000 francs qui restent à la mère, expriment donc le sixième du bien total; ce bien est donc 60 000 francs. Le fils en prend la moitié, ou 30 000 francs; la fille en prend le tiers, ou 20 000 francs; il reste donc 10 000 francs à la mère.

182. *Diophante, l'auteur du plus ancien livre d'Algèbre qui nous reste, passa dans l'enfance la sixième partie du temps qu'il vécut et dans l'adolescence la douzième partie du même temps; ensuite il se maria et passa dans cette union le septième de sa vie augmenté de cinq*

ans, avant d'avoir un fils, auquel il survécut quatre ans et qui n'atteignit que la moitié de l'âge auquel son père parvint. On demande l'âge qu'avait Diophante quand il mourut. Diophante passa, le 6e de sa vie dans l'enfance, le 12e dans l'adolescence, le 7e plus 5 ans, dans le mariage avant d'avoir un fils, la moitié de sa vie avec son fils, et 4 ans après la mort de son fils; ce qui fait les $\frac{75}{84}$ de sa vie, plus 9 ans; mais il passa sa vie entière dans ces divers états; les $\frac{9}{84}$ de l'âge de Diophante sont donc 9 ans; $\frac{1}{84}$ de cet âge est donc un an. *Diophante vécut donc 84 ans.* Si l'on fait la *preuve*, on trouvera que Diophante passa, 14 ans dans l'enfance, 7 ans dans l'adolescence, 17 ans dans le mariage avant d'avoir un fils, 42 ans avec son fils et 4 ans après la mort de son fils; ce qui fait 84 ans en tout.

183. *Un homme, qui entre dans une église avec une somme d'argent entièrement composée d'écus de 3#, donne autant de pièces de 12s qu'il a d'écus. Dieu, change les écus de 3# qui lui restent en pièces de 5#. Le dévot sort de l'église avec un nombre exact de pistoles, et donne 1# par pistole; il lui reste un nombre exact de demi-louis. Dieu change ces demi-louis en pièces de 21#. Le dévot ayant dépensé 3#, rentre chez lui avec autant d'écus de 6#, qu'il avait d'écus de 3# en entrant dans l'église. Quelle somme d'argent avait-il d'abord?*

Le dévot entre dans l'église avec une certaine somme d'argent; il donne 12s par écu de 3#, c'est-à-dire le cinquième de ce qu'il a; il ne lui reste donc que les $\frac{4}{5}$ de ce qu'il avait d'abord. Dieu change les écus de 3# qui lui restent, en pièces de 5#; mais 5# valent les $\frac{5}{3}$ de 3#. Le dévot aura donc, après ce changement, les $\frac{5}{3}$ de ce qui lui restait, c'est-à-dire les $\frac{5}{3}$ des $\frac{4}{5}$ de la somme primitive, ou les $\frac{4}{3}$ de cette somme; il donne 1# par 10#, c'est-à-dire le dixième de ce qu'il a; il ne lui reste donc que les $\frac{9}{10}$ de son argent et comme cet argent est les $\frac{4}{3}$ de sa somme primitive, il ne lui reste que les $\frac{9}{10}$ des $\frac{4}{3}$ de cette somme, c'est-à-dire, les $\frac{36}{30}$ ou les $\frac{6}{5}$ de son argent primitif. Dieu change ses pièces de 12#, en pièces de 21#; or 21# sont les $\frac{7}{4}$ de 12#; le dévot aura donc, après ce changement, les $\frac{7}{4}$ de ce qui lui restait, c'est-à-dire les $\frac{7}{4}$ des $\frac{6}{5}$ de son argent primitif, ou les $\frac{21}{10}$ de cet argent. Mais, $\frac{21}{10}$ valent $2 + \frac{1}{10}$; si donc il dépensait le dixième de son argent primitif, il rentrerait chez lui avec le double de cet argent, c'est-à-dire avec autant d'écus de 6# qu'il avait d'abord d'écus de 3#, comme l'exige

l'énoncé. Il faut donc que sa dépense 3#, soit le dixième de son argent primitif, et par conséquent que la somme qu'il avait en entrant dans l'église soit 30#. Ce nombre satisfait à toutes les conditions du problème, car le dévot entre dans l'église avec 30#, ou 10 écus de 3#; il donne aux pauvres 10 pièces de 12ˢ, ou 6#; il lui reste 24#, ou 8 écus de 3#; ces 8 écus de 3# se changent en 8 pièces de 5#, qui valent 40#, ou 4 pistoles; il donne 1# par pistole, c'est-à-dire 4# sur 4 pistoles; il ne lui reste donc que 36# ou 3 demi-louis; chaque demi-louis se change en une pièce de 21#; les 3 demi-louis deviennent donc 3 pièces de 21#, ou 63#; le dévot dépense 3#; il lui reste 60#, ou 10 écus de 6#, c'est-à-dire autant d'écus de 6# qu'il avait d'abord d'écus de 3#.

184. *Deux couriers vont dans le même sens. Le premier a une avance de 138 lieues, fait 3 lieues en 4 heures et part 40 heures avant le second, qui parcourt 6 lieues en 7 heures. On demande, dans combien de temps les couriers se joindront et quelles seront les distances des points de départ au point de rencontre?*

Le 1er courier en 4 heures fait..... 3 lieues;

Le 1er courier en une heure fait..... $\frac{3}{4}$ lieue;

Le 1er courier en 40 heures fait..... 30 lieues.

Lorsque le second courier part, le premier a donc une avance de 138 lieues plus 30 lieues, ou de 168 lieues; le second courier ne rencontrera donc le premier que lorsqu'il s'en sera rapproché de 168 lieues. Mais,

Le 2e courier en 7^h fait..... 6 lieues.

Le 2e courier en 1^h fait donc..... $\frac{6}{7}$ lieue.

Mais, le 1er courier en 1^h fait..... $\frac{3}{4}$ lieue.

Les couriers se rapprochent donc, de $\frac{6}{7} - \frac{3}{4}$ ou $\frac{3}{28}$ lieue, en 1^h,
de 3 lieues en 28^h,
de 1 lieue en $\frac{28^h}{3}$.

Il se rapprocheront donc de 168 lieues, en 168 fois $\frac{28^h}{3}$ ou 1568^h.

Ainsi, *après 1568 heures de marche, le second courier rencontrera le premier.* Le second courier aura parcouru 1568 fois $\frac{6}{7}$ lieue, ou 1344 lieues. Le premier courier, qui part 40 heures avant le second, aura marché pendant 1608 heures et aura parcouru 1608 fois $\frac{3}{4}$ lieue, ou 1206 lieues. Les espaces 1206

lieues et 1344 lieues, parcourus par les deux couriers, exprimant respectivement les distances des points de départ au point de rencontre, leur différence doit être égale à la distance des points de départ; et en effet, cette différence est 138 lieues.

185. *Deux couriers vont dans le même sens; le premier a une avance de 200 lieues, fait 3 lieues en 4 heures et part 40 heures avant le second, qui fait 6 lieues en 7 heures. Après combien d'heures de marche le second courier ne sera-t-il plus en arrière du premier que de 62 lieues?* Si l'on répète les calculs du problème précédent, on trouvera que le premier courier parcourt $\frac{3}{4}$ de lieue par heure et a fait, avant le départ du deuxième courier, 30 lieues, qui, jointes aux 200 lieues que celui-là avait d'avance, forment une avance totale de 230 lieues. Par conséquent, pour que les deux couriers ne soient plus distans que de 62 lieues, le second doit se rapprocher du premier de, 230 — 62, ou 168 lieues. Ce rapprochement aura donc lieu en 1568 heures de marche (n° 184).

Dans les deux problèmes précédens, les espaces parcourus par chaque courier étant proportionnels aux temps employés à les parcourir, on dit que le *mouvement* est *uniforme* et dans ce cas, l'espace parcouru pendant l'unité de temps se nomme *vitesse*. Ainsi, dans le n° 184, la vitesse du premier courier est $\frac{3}{4}$ lieue et celle du second est $\frac{6}{7}$ lieue.

186. *Deux couriers partent en même temps des deux pieds opposés d'une montagne, et atteignent le sommet au même instant; les difficultés des chemins, sont comme 4 est à 3, et les espaces parcourus, sont comme 9 est à 10. Quel est le rapport des vitesses absolues des couriers?* Ce rapport étant le même que celui des espaces que les couriers parcourraient s'ils marchaient pendant le même temps sur la même route; il suffit de calculer ce dernier rapport. Les difficultés des chemins sont comme 4 est à 3; les espaces parcourus par un même courier, sont en raison inverse, c'est-à-dire, comme 3 est à 4 (n° 170), ou comme 9 est à 12. Par conséquent, si le premier courier met une minute à faire 9 mètres sur le premier côté de la montagne, il parcourrait de l'autre côté 12 mètres dans le même temps. Mais, le rapport des espaces parcourus par les couriers, sur les deux côtés de la montagne, étant celui de 9 à 10, pendant que le premier courier parcourt 9^m sur le premier côté de la montagne, le second parcourt 10^m sur le 2e côté; les vitesses absolues des couriers sont donc telles, qu'en une minute, et sur le 2e côté de la montagne, le premier courier parcourrait 12^m et le second 10^m. *La vitesse absolue du premier courier est donc à celle du second, comme 12 est à 10, ou comme 6 est à 5.*

187. *Un lévrier poursuit un lièvre, qui a 82 sauts de lièvre d'avance. Pendant que le lièvre fait 13 sauts, le lévrier n'en fait que 9; mais 3 sauts du lévrier, en valent 5 du lièvre. En combien de sauts le lévrier attrapera-t-il le lièvre?*

Si tout était exprimé en sauts de lièvre, il n'y aurait pas de difficulté; mais 3 sauts de lévrier en valant 5 de lièvre, 9 sauts de lévrier en valent 15 de lièvre. Donc, si en une minute le lièvre fait 13 sauts, dans le même temps le lévrier fait 9 sauts, qui valent 15 sauts de lièvre. De sorte qu'en une minute, le lévrier se rapproche du lièvre de 2 sauts de lièvre; pour s'en rapprocher des 82 sauts de lièvre, dont il était en arrière, il lui faudra donc 41 minutes; pendant ce temps, le lévrier aura fait 41 fois 9 sauts, ou 369 sauts, et le lièvre aura fait 41 fois 13 sauts, ou 533 sauts. Ainsi, *le lévrier attrapera le lièvre, en 369 sauts.* Et en effet; 3 sauts de lévrier en valent 5 de lièvre, un saut de lévrier vaut $\frac{5}{3}$ de saut de lièvre; les 369 sauts de lévrier, valent donc 369 fois $\frac{5}{3}$ de saut de lièvre, ou 615 sauts de lièvre; or le lièvre n'a fait, dans le même temps, que 533 sauts, c'est-à-dire, 82 sauts de moins que le lévrier; le lévrier a donc effectivement gagné sur le lièvre, les 82 sauts de lièvre, dont il était en arrière; il a donc attrapé le lièvre.

188. *Une montre marque midi. Il faut trouver combien de fois les aiguilles se rencontreront depuis midi jusqu'à minuit, et à quelle heure se fera chaque rencontre.*

En une heure, l'aiguille des minutes parcourt les 60 divisions du cadran, et l'aiguille des heures parcourt les 5 divisions qui séparent deux heures consécutives; les aiguilles se rapprochent donc de 55 divisions par heure, ou d'une division en $\frac{1}{55}$ d'heure. Cela posé; si l'aiguille des heures restait sur midi, celle des minutes ne la joindrait qu'après avoir parcouru les 60 divisions du cadran; l'aiguille des minutes, pour joindre celle des heures, doit donc parcourir 60 divisions de plus, c'est-à-dire s'en rapprocher de 60 divisions; mais pour s'en rapprocher d'une division, il lui faut $\frac{1}{55}$ d'heure; pour se rapprocher des 60 divisions, il lui faudra donc $\frac{60^h}{55}$, ou $1^h\,5'\,\frac{5}{11}$. Les époques des autres rencontres, s'en déduisent avec facilité, car la vitesse des aiguilles, étant *uniforme*, le temps écoulé depuis la séparation des aiguilles, jusqu'à leur rencontre, est toujours le même, c'est-à-dire $\frac{60^h}{55}$. *L'instant d'une rencontre, augmenté de* $\frac{60^h}{55}$, *donne donc l'heure de la rencontre suivante.* On trouve ainsi que la onzième rencontre a lieu à 12 heures, c'est-à-dire, sur le point de départ des aiguilles.

189. Dans les questions précédentes, le seuls principes de l'Arithmétique, ont fourni le résultat, sans aucun tâtonnement; mais il existe des *problèmes qui échappent aux méthodes directes.* Si l'on essayait alors des nombres pris au hasard, on pourrait faire beaucoup de tentatives inutiles; *dans ce cas, on assure la marche du raisonnement, à l'aide d'hypothèses*

qui sont arbitraires, et qui donnent quelquefois le moyen de détruire ces erreurs. En voici des exemples :

190. *Un père de famille laisse* 11 000 *francs à partager entre sa veuve, deux fils et trois filles. Le testament porte que la part de la mère sera double de celle d'un fils, et qu'un fils recevra le double d'une fille. On propose d'effectuer ce partage.* D'après les rapports établis entre les parts, si une fille prenait 1 franc, un fils prendrait 2 francs et la mère 4 francs ; les 3 filles prendraient donc 3 francs, les 2 fils 4 francs et la mère 4 francs ; ce qui fait 11 francs en tout. Pour en déduire chaque part, on dira :

Sur 11^f, la mère prendrait... 4^f, les 2 fils 4^f, les 3 filles 3^f.
Sur 11000^f, la mère prendra donc 4000^f, les 2 fils 4000^f, et les 3 filles 3000^f.

191. *Avec des pièces de* 6^s *et de* 15^s, *faire* 180^s, *en* 18 *pièces.*

Si les 18 pièces étaient de 15^s, elles formeraient 270^s, au lieu de 180^s. Il faut donc diminuer de 90^s, la valeur de ces 18 pièces, et cela sans en changer le nombre ; ce qu'on obtiendra, en remplaçant des pièces de 15^s, par des pièces de 6^s. Mais, chaque pièce de 6^s, substituée à une pièce de 15^s, diminue de 9^s, la valeur des 18 pièces. Pour la diminuer de 90^s, il faut donc substituer 10 pièces de 6^s à 10 pièces de 15^s. On formera donc 180^s, en 18 pièces, avec 10 pièces de 6^s, et 8 pièces de 15^s.

192. *On voudrait, avec de la poudre à* 24^s *la livre, et de la poudre à* 14^s, *composer un mélange de* 10lb, *qui revînt à* 20^s *la livre.*

Le mélange, de 10lb à 20^s, coûte 200^s ; or 10lb à 24^s coûteraient 240^s ; il faut donc diminuer ce dernier prix, de 40^s, en remplaçant de la poudre à 24^s, par de la poudre à 14^s. Mais, 14^s est au-dessous de 24^s, de 10^s ; conséquemment, pour chaque livre de poudre à 24^s, remplacée par une livre à 14^s, le prix 240^s, des dix livres, diminue de 10^s ; il diminuera donc de 40^s, en remplaçant 4lb à 24^s, par 4lb à 14^s. Le mélange doit donc être composé de 4lb à 14^s, et de 6lb à 24^s.

Si l'*on demande dans quelle proportion, on doit mêler de la poudre à* 24^s *la livre avec de la poudre à* 14^s, *pour que la livre du mélange revienne à* 20^s ; on fixera arbitrairement le nombre des livres du mélange ; ayant choisi 10lb par exemple, on trouvera que ce mélange est composé de 6lb à 24^s, et de 4lb à 14^s ; de sorte que *le rapport demandé est celui de* 6 *à* 4, *ou de* 3 *à* 2. Puisque 5lb du mélange doivent contenir, 3lb à 24^s et 2lb à 14^s ; *la poudre à* 24^s *forme les* $\frac{3}{5}$ *du mélange.* Un mélange de 25lb à 20^s la livre, doit donc être composé de 15lb à 24^s et de 10lb à 14^s. (*)

(*) La Méthode indiquée dans les nos 190, 191 et 192, a reçu le nom de *règle d'une fausse position*, parce qu'elle conduit au résultat, à l'aide *d'une fausse supposition.*

193. *Un joueur, interrogé sur ce qu'il a dans sa bourse, répond que l'excès du quintuple de ses louis sur 30, est égal à l'excès du double de ces mêmes louis sur 6. Combien le joueur avoit-il de louis?*

Pour résoudre ce problème, on donnera une valeur arbitraire au nombre des louis; si ce nombre ne jouit pas des propriétés énoncées, il produira une certaine erreur, que l'on détruira à l'aide d'une seconde hypothèse. Voici le détail du calcul:

1re *hypothèse*..... 20 louis.	2e *hypothèse*..... 19 louis.
L'excès de 5 fois 20, sur 30, est.. 70.	L'excès de 5 fois 19, sur 30, est.. 65.
L'excès de 2 fois 20, sur 6, est.. 34.	L'excès de 2 fois 19, sur 6, est.. 32.
L'*erreur* correspondante est donc 36.	L'*erreur* correspondante est donc 33.

Pour diminuer l'erreur 36, de 3, il faut diminuer d'un, le nombre 20 des louis. Pour diminuer l'erreur 36, de 36, il faut diminuer de 12, le nombre 20 des louis. Le nombre des louis cherché est donc 20 moins 12, ou 8.

Le joueur avoit donc 8 louis. Et en effet; l'excès du quintuple de 8, sur 30, est 10, et l'excès du double de 8, sur 6, est également 10, comme l'exige l'énoncé.

194. *Une dévote entre dans une église avec une certaine somme d'argent; Dieu double cette somme et en sortant de l'église, la dévote donne 10 francs aux pauvres. Elle entre dans une seconde église; Dieu double son argent; elle sort de cette église et donne 20 francs aux pauvres. Le double de l'argent qui lui reste après cette dernière aumône, est autant au-dessous de 200 francs, que le triple de cet argent est au-dessus de 200 francs. Il faut déterminer combien la dévote avait d'argent en entrant dans la première église?* Calculons d'abord l'argent qui restait à la dévote, après sa dernière aumône; nous en déduirons ce qu'elle avait à son entrée dans la première église.

Le double de l'argent qui reste à la dévote, après sa dernière aumône, est autant au-dessous de 200 francs, que le triple de cet argent est au-dessus de 200 francs; le *reste* que l'on obtient, en ôtant de 200 francs le double de l'argent qu'avait la dévote, après sa dernière aumône, doit donc être égal au triple de cet argent, diminué de 200 francs. Faisons deux hypothèses sur l'argent qui reste à la dévote après sa dernière aumône,

Première hypothèse..... 70f.	*Seconde hypothèse*..... 71f.
De 200f, ôtant 2 fois 70f, reste 60f.	De 200f, ôtant 2 fois 71f, reste 58f.
De 3 fois 70f, ôtant 200f, reste 10f.	De 3 fois 71f, ôtant 200f, reste 13f.
Première erreur..... 50f.	*Seconde erreur*..... 45f.

Pour dim. l'erreur 50f, de 5f, il faut aug. de 1f la 1re hypothèse 70f.
Pour dim. l'erreur 50f, de 50f, il faut aug. de 10f la 1re hypothèse 70f.

L'argent cherché est donc, 70 francs plus 10 francs, ou 80 francs.

Après sa dernière aumône, la dévote avait donc 80 francs. Pour en déduire ce qu'elle avait, à son entrée dans la première église, on dira : la dévote, après avoir fait sa dernière aumône, de 20 francs, avait encore 80 francs; elle avait donc 100 francs, en sortant de la seconde église, et 50 francs en y entrant; mais avant d'y entrer, elle avait donné 10 francs aux pauvres; avant cette première aumône, c'est-à-dire, en sortant de la première église, elle avait donc 60 francs, et par conséquent 30 francs en y entrant. Ce nombre satisfait à toutes les conditions du problème; car la dévote, entre dans la première église avec 30 francs, elle en sort avec le double 60 francs; elle donne 10 francs; il lui reste 50 francs, en entrant dans la seconde église; elle en sort avec 100 francs; elle donne 20 francs; il lui reste 80 francs; le double de cette dernière somme, est au-dessous de 200 francs, de 40 francs; et le triple de cet argent, est de 40 francs au-dessus de 200 francs, comme l'exige l'énoncé.

195. Remarque. *La méthode des deux hypothèses* (*), *suppose que les erreurs diminuent proportionnellement aux hypothèses faites sur les valeurs des inconnues. Mais cette condition n'est pas toujours remplie; le calcul en avertit alors, en conduisant à un nombre qui ne satisfait pas aux conditions du problème. Dans ce cas, la question proposée est du ressort de l'algèbre.* Pour en donner un exemple, *proposons-nous de trouver par quel nombre on doit diviser* 12, *pour que le quotient exact, soit égal au diviseur augmenté d'un.* Le nombre cherché devant diviser 12, nous essayerons deux diviseurs de 12, tels que 2 et 4; si le nombre cherché était 2, le quotient de 12 par ce nombre serait 6; or ce quotient doit être égal au diviseur 2, augmenté d'un, ou à 3; il y a donc 3 d'erreur. On trouvera de même, que l'erreur correspondante à l'hypothèse 4, est 2; mais l'hypothèse 2, a donné 3 d'erreur. On dira donc : pour diminuer l'erreur 3, de 1, il faut augmenter l'hypothèse 2, de 2; pour diminuer l'erreur 3, de 3, il faut donc augmenter l'hypothèse 2, de 3 fois 2; ce qui donne 8. Or, ce nombre ne satisfait pas aux conditions du problème, car le quotient de 12 par 8, n'est pas égal au diviseur 8, augmenté d'un. *L'Arithmétique ne peut fournir aucune solution directe, des problèmes de cette espèce.* On verra, dans l'*Algèbre*, que *le nombre cherché est* 3.

196. *Les neuf Muses, portant chacune le même nombre de couronnes de fleurs, rencontrèrent les trois Grâces, et leur offrirent des couronnes. La distribution faite, les Grâces et les Muses avaient chacune, le même nombre de couronnes. On demande combien les Muses portaient de couronnes, et combien elles en donnèrent.*

(*) Cette méthode est connue sous le nom de *règle de double fausse position*, parce qu'elle conduit au résultat, à l'aide de *deux fausses suppositions*.

ernière aumône, la dévote avait donc 80 francs. Pour
elle avait, à son entrée dans la première église, on
s avoir fait sa dernière aumône, de 20 francs, avait
e avait donc 100 francs, en sortant de la seconde
y entrant, mais avant d'y entrer, elle avait donné
avant cette première aumône, c'est-à-dire, en sortant
se, elle avait donc 60 francs, et par conséquent
nombre satisfait à toutes les conditions du problème.
dans la première église avec 30 francs, elle en
ncs; elle donne 10 francs; il lui reste 50 francs
de église elle en sort avec 100 francs: elle donne
o francs: le double de cette dernière somme,
, de 40 francs; et le triple de cet argent, est
200 francs, comme l'exige l'énoncé.

ROUE. *La méthode des deux hypothèses* ...plémens sont,
diminuent proportionnellement ...
des inconnues. Mais cette condition ...

cul en avertit alors, en ...
aux conditions du problème ... avait donc écrire cette
du ressort de l'algèbre. ... nombres.
de trouver par quel ... *parce que les trois*
exact, soit égal au ... DOUBLÉ (*), *et* LOUIS,
nt diviser 12, nous ... *Antoine, André et Louis*
nombre cherché ...
ce quotient doit ... 216 coups différens, savoir:
donc 3 d'erreur. ... *Les mises d'Antoine, d'An-*
'hypothèse 4, est ...

---

ic: pour diminuer ... faces supérieures portent des points
2; pour diminuer ... deux points sont semblables, on dit
2, de 3 fois 2: ... points semblables forment un *triplé*.
litions du pro... *ble*, 3, 3, 5, est un *doublé* et 5, 5, 5,
ur 8, augment...
ecte, *des pro*...
le nombre ... d'un dé, peut se combiner avec les six
eux premiers dés donnent donc 36 coups
neuf Mus...
ncontrer ... du troisième dé, pouvant se combiner avec ces
ion faite, ... des coups possibles, de trois dés, est 6 fois 36,
ourons ...
ombres ... triplés, les six numéros, donneront *six*
... 2, etc.
... de *doublés*, nous chercherons d'abord
... lesquels le premier dé n'entre pas. Le
... combiner avec les cinq doublés, double 2,
... double 6, des autres dés; chacun des six

Le nombre des Muses étant triple de celui des Grâces, la totalité des couronnes qui restent aux Muses après la distribution, est le triple de ce qu'elles ont donné aux Grâces; les Muses, portaient donc, le quadruple de ce qu'elles ont donné aux Grâces. Par conséquent, *le nombre total des couronnes, est divisible par* 4, *et les Muses ont donné le quart de ce qu'elles portaient.* Or, chacune des neuf Muses, avait d'abord un même nombre de couronnes; le nombre total des couronnes, est donc exactement divisible par 9; nous avons prouvé qu'il était aussi divisible par 4; il doit donc être divisible par 4 fois 9, ou par 36. *Ainsi, le nombre des couronnes que portaient les* 9 *Muses, peut être* 36, *ou l'un quelconque des multiples de* 36. En effet; 36 et chacun de ses multiples, satisfont à toutes les conditions du problème. Par exemple, si les neuf Muses, portant 36 couronnes, en donnent le quart aux Grâces; il restera 27 couronnes aux neuf Muses, et les trois Grâces en auront 9; chaque Muse et chaque Grâce, portera donc 3 couronnes, après la distribution.

197. *Partager huit litres de vin, en deux parties égales, avec trois vases inégaux, dont le premier contient* 8 *litres, le second* 5 *litres, et le troisième* 3 *litres. Les vases sont vides.* Pour abréger, désignez le vase de 8 litres par A, celui de 5 litres par B, et celui de 3 litres par C. Mettez les 8 litres de vin dans A; versez de A en C, de C en B, de A en C, de C en B, de B en A, de C en B et de A en C; il restera 4 litres dans A.

198. *Trois joueurs conviennent que celui qui perdra, doublera l'argent des deux autres. Après trois parties, le premier joueur a* 24 *francs, le second* 28 *francs et le troisième* 14 *francs. On demande ce que chaque joueur avait en se mettant au jeu. Le premier joueur a perdu la première partie, le second joueur la deuxième, et le troisième joueur la troisième.* D'après cet énoncé,

A la fin de la troisième partie, le 1er *joueur a* 24 *francs, le* 2e 28 *francs, le* 3e 14 *francs.*

Le troisième joueur ayant doublé l'argent des deux autres, ceux-ci n'avaient à la fin de la seconde partie que la moitié de ce qu'ils ont, et celui-là avait de plus, ce que les deux autres avaient de moins. Ainsi:

A la fin de la deuxième partie, le 1er *joueur avait* 12 *francs, le* 2e 14 *francs, le* 3e 40 *francs.*

Des raisonnemens analogues, conduiront aux résultats suivans:

Fin de la 1re *partie..* 1er *joueur* 6 *francs,* 2e 40 *francs,* 3e 20 *francs.*
Entrée au jeu..... 1er *joueur* 36 *francs,* 2e 20 *francs,* 3e 10 *francs.*

199. *Quatre joueurs conviennent, que le perdant doublera l'argent des trois autres. Le* 1er *joueur perd la* 1re *partie; le* 2e, *la* 2e; *le* 3e, *la* 3e; *et le* 4e, *la* 4e. *Ils sortent du jeu avec,* 40 *francs,* 20 *francs,* 10 *francs et* 5 *francs. Combien chaque joueur avait-il d'argent, en se mettant au jeu?* Si l'on raisonne comme dans le n° 198, on trouvera, en remontant de la 4e partie à la 1re, que l'argent de chaque joueur est....

Fin de la 4e partie; 1er joueur 40f, 2e...20f, 3e...10f, 4e... 5f.
Fin de la 3e partie; 1er joueur 20f, 2e...10f, 3e... 5f, 4e...40f.
Fin de la 2e partie; 1er joueur 10f, 2e... 5f, 3e...40f, 4e...20f.
Fin de la 1re partie; 1er joueur 5f, 2e...40f, 3e...20f, 4e...10f.
Entrée au jeu, 1er joueur 40f, 2e...20f, 3e...10f, 4e... 5f.

De sorte qu'à la fin de la 4e partie, chaque joueur a autant d'argent, qu'il en avait en se mettant au jeu.

200. *Deviner la somme de plusieurs nombres?* Faites poser trois nombres de quatre chiffres; mettez dessous trois autres nombres, en *complétant* chaque chiffre, pour aller à 9; les six nombres qui en résulteront, pris deux à deux, formeront 9999. La somme de ces six nombres, sera donc 3 fois 9 999 ou 29 997. Par exemple, si les nombres posés arbitrairement sont,

2222, 1234, 5678,

on mettra dessous leurs *complémens* à 9999; ces complémens sont,

7777, 8765, 4321.

La somme de ces nombres, sera 29 997. On pouvait donc écrire cette somme, avant de faire poser les trois premiers nombres.

201. *On jette trois dés sur la table.* ANTOINE, *parie que les trois dés seront différens.* ANDRÉ, *parie qu'il y aura un* DOUBLÉ (*), *et* LOUIS, *parie pour un* TRIPLÉ. *On demande combien, Antoine, André et Louis doivent mettre pour que le jeu soit égal.*

Avec un peu d'attention, on voit qu'il y a 216 coups différens, savoir: 120 coups simples, 90 doublés et 6 triplés (**). *Les mises d'Antoine, d'An-*

(*) Lorsqu'en jetant trois dés, les trois faces supérieures portent des points différens, le coup est *simple;* quand deux points sont semblables, on dit qu'il y a un *doublé;* enfin, trois points semblables forment un *triplé.* Ainsi, 3, 1, 5, est *un coup simple*, 3, 3, 5, est un *doublé* et 5, 5, 5, est un *triplé.*

(**) En effet; chaque numéro d'un dé, peut se combiner avec les six numéros d'un autre dé; les deux premiers dés donnent donc 36 coups possibles. Chaque numéro du troisième dé, pouvant se combiner avec ces 36 coups, le nombre total des coups possibles, de trois dés, est 6 fois 36, ou 216 ou 6 × 6 × 6.

Chaque numéro, donnant un triplé, les six numéros, donneront *six triplés*, savoir: triple 1, triple 2, etc.

Pour trouver combien il y a de *doublés*, nous chercherons d'abord combien il y a de doublés, dans lesquels le premier dé n'entre pas. Le n° 1, du premier dé, peut se combiner avec les cinq doublés, double 2, double 3, double 4, double 5, double 6, des autres dés; chacun des six

dré et de Louis, doivent donc être proportionnelles aux nombres 120, 90 *et* 6, c'est-à-dire aux nombres 20, 15 et 1, *car pour qu'un jeu de hasard soit établi d'une manière juste, il suffit et il faut, que les mises soient proportionnelles au nombre de chances favorables*, parce qu'alors si tous les coups possibles arrivaient successivement une seule fois, chaque joueur sortirait avec autant d'argent qu'il en avait en se mettant au jeu. Ce qui est de toute justice. D'après ce principe, la mise de Louis restant arbitraire, celle d'André doit être égale à 15 fois la mise de Louis, et la mise d'Antoine doit être égale à 20 fois celle de Louis. Par exemple, si les mises d'Antoine, d'André et de Louis sont 20#, 15# et 1#, la mise totale sera 36#; si tous les coups possibles arrivent une fois; après 216 coups, Antoine aura mis 216 fois 20#, ou 4320#; il aura gagné 120 fois 36#, ou 4320#; Antoine aura donc autant d'argent, qu'en se mettant au jeu. Il en serait de même des autres joueurs. Les rapports des mises sont donc établis de manière à rendre le jeu égal pour tous les joueurs.

202. *On pose trois bijoux sur une table; trois personnes en prennent chacune un. Il faut deviner l'objet pris par chaque personne?* Si les trois bijoux sont un *anneau*, un *étui* et une *bague*; on les désignera par les lettres initiales, *a*, *e*, *b*; on donnera, un jeton à la 1re personne, et 3 à la 2e; on mettra 8 jetons sur la table; chaque personne choisira ensuite un des bijoux (à votre insçu). Pour deviner l'objet pris par chaque personne, vous direz: que la personne qui a l'anneau, prenne sur la table (à votre insçu), autant de jetons qu'elle en a dans la main, et que celle qui a l'étui, prenne le double des jetons qu'elle a. Demandez ensuite combien il *reste* de jetons; ce *reste* ne pourra être que l'un des six nombres

1, 2, 3, 5, 6, 7

qui répondent aux six combinaisons, possibles

ae, *be*, *ea*, *ba*, *eb*, *ab*.

---

numéros du premier dé, donnant 5 doublés, il y a 30 doublés, dans lesquels le premier dé n'entre pas. Chaque dé fournissant 30 doublés, dans lesquels ce dé n'entre pas, les trois dés donneront 90 doublés.

Les 216 coups que peuvent présenter les trois dés, contenant 6 triplés et 90 doublés; le nombre des coups simples est 120. Et en effet; prenons le n° 1 du premier dé, et le n° 2 du second dé; pour les coups simples, ces deux numéros ne peuvent se combiner qu'avec les nos 3, 4, 5, 6, du troisième dé; ce qui détermine, quatre coups simples. Le n° 1 du premier dé restant fixe, les nos 2, 3, 4, 5, 6, du second dé, combinés convenablement avec ceux du troisième dé, donneront donc chacun 4 coups simples; ce qui fera 20 coups simples en tout. Chaque numéro du premier dé, donnant 20 coups simples, les six numéros fourniront 120 coups simples. Par conséquent, *si tous les coups possibles arrivaient une fois, sur* 216 *coups, il y aurait,* 6 *triplés*, 90 *doublés et* 120 *coups simples.*

1re et la 2e lettre indiquent respectivement l'objet pris par chaque
ne. Par exemple, lorsqu'il *reste* 5 jetons, sur la table, la combi-
ba, placée sous le *reste* 5, exprime que la 1re personne a la bague *b*
e la 2e a l'anneau *a*.

narque. L'exactitude de cette règle est facile à vérifier, car trois
ne peuvent se combiner que de six manières différentes, et en ap-
nt la règle, on trouve que les six *restes* correspondans sont, 1, 2, 3, 5, 6, 7.
eut exécuter ce tour de plusieurs manières, en changeant le nombre
tons, tout se réduit à *choisir des nombres de jetons tels, que*
ue combinaison donne un reste différent. Nous avons choisi les plus
nombres possibles. Ces remarques s'appliquent à la question suivante :
. *On place quatre bijoux sur une table; un anneau, un étui,*
bague et une montre. Quatre personnes prennent chacune un de
ijoux. Il faut deviner l'objet pris par chaque personne. Voici la
: donnez, un jeton à la 1re personne, 4 à la 2e, 14 à la 3e, et
52 jetons sur la table. Chaque personne ayant pris un des bijoux,
nez : que la personne qui a l'anneau prenne autant de jetons sur la
qu'elle en a dans la main, que celle qui a l'étui prenne le double
qu'elle a, et que celle qui a la bague prenne le triple de ce qu'elle
emandez combien il reste de jetons sur la table, et consultez ensuite
bleau :

, 2, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 17, 20, 21, 23,
, *meb*, *eab*, *mab*, *emb*, *amb*, *abe*, *mbe*, *bae*, *mae*, *bme*, *ame*,
, 26, 27, 30, 35, 36, 38, 39, 41, 43, 45, 46.
, *mba*, *bea*, *mea*, *bma*, *ema*, *ebm*, *abm*, *bem*, *aem*, *bam*, *eam*.

nombre des jetons qui restera sur la table ne pourra jamais être que
des 24 nombres compris dans le tableau, et ces nombres correspondront
24 combinaisons des lettres initiales *a*, *e*, *b*, *m* ; la 1re, la 2e, et la 3e
de chaque combinaison, indiqueront respectivement l'objet pris par
re personne, par la 2e et par la 3e. Par exemple, quand il *reste* 12
s sur la table, la combinaison *mbe*, placée sous ce *reste*, exprime
la 1re personne a la *montre*, la 2e la bague et la 3e l'étui.

OTA. M. C. J. Brianchon, Capitaine d'Artillerie, a donné une solution
rale, très-ingénieuse, des problèmes des nos 202 et 203. On trouve cette
tion, dans la *Correspondance de l'Ecole Polytechnique*.

FIN DE LA DEUXIÈME PARTIE.

TROISIÈME PARTIE (*).

204. Dans *tout système de numération, le nombre des chiffres est égal à la* base b; *les* $b-1$ *chiffres significatifs expriment les nombres* $1, 2, 3, 4, \ldots, b-1$; *le chiffre* 0, *nommé zéro, n'a aucune valeur par lui-même, il sert à conserver aux chiffres significatifs la place qu'ils doivent occuper. En avançant successivement d'un rang vers la gauche d'un nombre, ses chiffres expriment des unités de* b *en* b *fois plus grandes.* Dans ces hypothèses, chaque unité du premier ordre, vaut 1; l'unité, du deuxième ordre, vaut b; l'unité du troisième ordre, vaut $b \times b$ ou b^2; et ainsi de suite. Les nombres, b, b^2, b^3, etc., sont représentés par $(10)_b$, $(100)_b$, $(1000)_b$, etc. et en général, *l'unité suivie de* α *zéros vers la droite, représente le nombre* b^α.

205. Les nombres, $1, 2, 3, \ldots, b-1$, sont exprimés par un seul chiffre; ajoutant l'unité à $b-1$, on forme le nombre b, qui est représenté par $(10)_b$. Mettant successivement tous les chiffres à la première et à la deuxième place, on obtient les nombres de deux chiffres; et ainsi de suite.

206. *Les conventions du n° 204, donnent le moyen d'écrire tous les nombres entiers.* Cela se réduit à faire voir, qu'un nombre entier quelconque n, étant écrit dans ce système, on peut toujours écrire le nombre $n+1$. Et en effet; lorsque le premier chiffre à droite du nombre n, est moindre que $b-1$, on passe de n à $n+1$, en augmentant ce chiffre d'une unité. Quand ce premier chiffre est $b-1$, en l'augmentant d'un, on forme une unité du deuxième ordre; lorsque le second chiffre est moindre que $b-1$, on peut y ajouter cette unité du deuxième ordre et lorsque le second chiffre est $b-1$, en ajoutant une unité du deuxième ordre, on obtient b unités du deuxième ordre, qui valent une unité du troisième ordre. On voit donc que lorsque tous les chiffres du nombre n ne sont pas égaux à $b-1$,

(*) *Cette troisième Partie est destinée aux Élèves qui savent l'Algèbre.* Pour éviter des répétitions inutiles, nous adopterons la notation suivante; b désignera toujours la base du système de numération; pour indiquer qu'un nombre sera écrit dans ce système, nous placerons le nombre entre parenthèses et nous mettrons la base b à droite de la parenthèse et un peu au-dessous. Les nombres qui ne seront pas entre parenthèses, seront écrits dans le système décimal. Ainsi, le nombre $(23)_b$ sera écrit dans le système dont la base est b; 14 sera écrit dans le système décimal, $(24)_{12}$ désignera un nombre écrit dans le système *duodécimal* (la base est douze).

on passe du nombre n au nombre $n+1$, en ajoutant l'unité à l'un des chiffres du nombre n. Lorsque le nombre n est composé de α chiffres égaux à $b-1$, le nombre $n+1$ est évidemment égal à l'unité suivie de α zéros, ou à b^{α}, car la collection de b unités d'un ordre quelconque, vaut une unité de l'ordre immédiatement supérieur. *On pourra donc toujours passer du nombre n, au nombre $n+1$.*

207. Remarque. *Dans le système dont la base est b, la valeur du plus grand nombre de α chiffres, est donc $b^{\alpha}-1$.*

208. *Lorsqu'un nombre est écrit dans le système dont la base est b, pour écrire ce nombre dans le système décimal; il suffit de multiplier, le premier chiffre à droite par 1, le deuxième par b, le troisième par b^2, et ainsi de suite, jusqu'au premier chiffre à gauche; la somme de ces produits est le nombre demandé.* Cela résulte de ce qu'en avançant successivement d'un rang vers la gauche du nombre proposé, les chiffres expriment des unités de b en b fois plus grandes (n° 204). Ainsi, le nombre $(275)_8$, étant écrit dans le système dont la base est huit, sa valeur est,

$$5+7\times 8+2\times 8^2=5+56+128=189.$$

209. Réciproquement, *un nombre étant donné dans le système décimal, pour écrire ce nombre dans le système dont la base est b; il suffit de diviser le nombre donné par b; le reste exprime le premier chiffre à droite du nombre demandé, et le quotient désigne les unités du deuxième ordre; divisant ce premier quotient par b, le reste est le deuxième chiffre du nombre cherché et le nouveau quotient exprime des unités du troisième ordre. Continuant à opérer de la même manière, on parvient à un quotient moindre que b; ce quotient est le dernier chiffre du nombre demandé.* Cela résulte de ce qu'il faut b unités d'un ordre quelconque, pour composer une unité de l'ordre immédiatement supérieur. Par exemple, si l'on veut écrire le nombre 189, dans le système dont la *base* est 8; on divisera 189 par 8; ce qui donnera le *reste* 5 et le quotient 23; divisant 23 par 8, le *reste* sera 7 et le quotient sera 2. De sorte qu'en allant de gauche à droite, les chiffres du nombre demandé sont, 2, 7 et 5; le nombre 189, écrit dans le système dont la base est 8, a donc pour valeur $(275)_8$.

210. *Un nombre étant écrit dans un système de numération, pour écrire ce nombre dans un autre système*, il suffit, après avoir exprimé le nombre dans le système décimal, d'écrire ce nombre décimal dans le nouveau système.

211. *Connaissant les expressions d'un même nombre* N, *dans deux systèmes différens; trouver les bases de ces systèmes.* On désignera les bases inconnues par x et y. Si les chiffres du nombre inconnu N, écrit dans le premier système, sont α, β, γ, etc.; et si les chiffres du même

nombre, écrit dans le second système, sont A, B, C, etc.; on aura n° 208 :

$$N = a + bx + cx^2 + \text{etc.}; \quad N = A + By + Cy^2 + \text{etc.}$$

Ces deux équations expriment toutes les conditions du problème, l'une des trois inconnues x, y, N. Il ne s'agit plus que il faut seulement observer, que les chiffres d'un nombre doivent être moindres que la *base*, on ne doit admettre pour x, que des nombres entiers positifs, plus grands que le plus grand des chiffres, a, b, c, etc.; et y doit être un nombre entier positif, plus grand que le plus grand des chiffres, A, B, C, etc. Ces valeurs de x et y, dépendent de l'équation

$$(3) \ldots a + bx + cx^2 + \text{etc.} = A + By + Cy^2 + \text{etc.}$$

Par exemple, lorsque les expressions d'un nombre inconnu N, dans deux systèmes inconnus, sont (7δ) et (6γ); en désignant les bases de ces systèmes, par x et y, on a

$$N = 8 + 7x; \quad N = 7 + 6y. \quad \text{D'où, } 6y - 7x = 1.$$

Les valeurs entières de x et y, qui satisfont à cette dernière équation, sont, $x = 6z - 1$, $y = 7z - 1$.

z représente un nombre entier indéterminé. Les *bases* x et y devant être respectivement plus grandes que 8 et 7, on trouvera les solutions du problème en donnant à l'indéterminée z, des valeurs entières plus grandes que l'unité.

$$z = 2, \text{ donnera } x = 11, \ y = 13; \ N = 85.$$

En effet, dans les systèmes dont les *bases* sont 11 et 13, les expressions du nombre 85, sont $(8\delta)_{11}$ et $(6\gamma)_{13}$.

212. *Connaissant la valeur d'un nombre, ainsi que les chiffres de ce nombre, il faut découvrir dans quel système de numération ce nombre est écrit.* On désignera le nombre donné par C, les chiffres de ce nombre par a, a_1, a_2, a_3, ... a_n, et la base du système demandée par x. On aura n° 208

$$(1) \ldots a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n = C.$$

Lorsque les quantités a, a_1, a_2, a_3, ... a_n et C, seront données en nombres, on résoudra l'équation (1), et l'on ne devra prendre que les valeurs entières positives de x, plus grandes que le plus grand des chiffres, a, a_1, a_2, a_3, ... a_n.

L'équation (1) a toujours une racine réelle positive. Cette équation n'admet pas d'autres racines réelles positives. En effet, on en déduit

$$(2) \ldots a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n = C - a.$$

Les nombres donnés, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, $C - a$, étant positifs, si l'on conçoit que x augmente d'une manière continue, depuis zéro, jusqu'à l'infini positif, le premier membre de l'équation (2) augmentera de même, d'une manière continue, depuis zéro jusqu'à l'infini; il existera donc une seule valeur réelle positive de x, qui rendra ce premier membre égal à $C - a$. Ce qui démontre le principe énoncé.

Le problème proposé, ne peut donc jamais admettre qu'une seule solution. Par exemple, pour trouver dans quel système, le nombre dont les chiffres (à partir de la gauche) sont 2, 7, 5, vaut 189, on désignera la base de ce système par x, et l'on aura

$$(275)_x = 189; \text{ ou } 5 + 7x + 2x^2 = 189.$$

La racine réelle positive de cette équation, étant 8, la base du système demandé est égale à 8. Et en effet,

$$(275)_8 = 5 + 7.8 + 2.8^2 = 5 + 56 + 128 = 189.$$

213. *Les méthodes que nous avons données, pour opérer sur les nombres écrits dans le système décimal, peuvent s'appliquer à un système quelconque; il suffit de se rappeler que dans le système dont la base est* b, *il faut* b *unités d'un ordre quelconque, pour en faire une de l'ordre suivant. Les preuves des quatre règles et le calcul des fractions, s'exécutent comme dans le système décimal.* On trouvera de cette manière que dans le système dont la base est sept, la somme des nombres $(354)_7$ et $(26)_7$ est $(413)_7$, que leur différence est $(325)_7$ et que leur produit est $(13563)_7$. Enfin, si l'on divise $(13563)_7$ par $(26)_7$, le quotient sera $(354)_7$. Pour faciliter cette division, on écrira tous les nombres dans le système décimal et le quotient 186, écrit dans le système dont la base est sept, donnera le quotient demandé $(354)_7$.

214. *Lorsqu'un nombre est écrit dans le système dont la base est* b, *pour multiplier ce nombre par* b^n, *c'est-à-dire par l'unité suivie de* n *zéros vers la droite, il suffit de mettre* n *zéros sur la droite du nombre donné*, car chaque chiffre avançant de n rangs vers la gauche, exprime des unités b^n fois plus grandes.

215. *Le produit de plusieurs nombres entiers ne change pas, dans quelqu'ordre qu'on effectue les multiplications.* La démonstration générale de cette propriété, repose sur les deux principes suivans:

216. Premier principe. *Un produit ne change pas de valeur, lorsqu'on transpose les deux derniers facteurs à droite.* En effet; soit le produit pab, dans lequel p désigne le produit d'un nombre quelconque de facteurs. a étant un nombre entier, on aura,

$$pa = p + p + p + p + \text{etc.}$$

Le second membre contiendra a fois p. Multipliant les deux membres par

b, on aura

$$pab = pb + pb + pb + pb + \text{etc.} = a \text{ fois } pb = pba.$$

Ce qui démontre le principe énoncé.

217. Second principe. *Si le produit de m facteurs ne change pas dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications, le produit de $m+1$ facteurs, jouira de la même propriété*, car pour former toutes les *permutations* d'un produit de $m+1$ facteurs, il suffit de changer successivement l'ordre des m premiers facteurs et l'ordre des deux derniers; ce qui ne change pas la valeur du produit. Or, le produit de deux facteurs ne change pas dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications (n° 21); le produit de trois facteurs jouit donc de la même propriété. Et ainsi de suite, en introduisant successivement un nouveau facteur. Le principe du n° 215 est donc démontré.

218. *Le produit de plusieurs facteurs commensurables* (*) *ne change pas, dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications.* En effet; les facteurs commensurables sont des nombres entiers ou des fractions. Dans le premier cas, le principe est démontré (n° 215); dans le second cas, on est toujours conduit à diviser le produit des numérateurs des fractions proposées, par le produit des dénominateurs, et ces produits ne changent pas dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications (n° 215).

219. *Le produit de plusieurs facteurs incommensurables ne change pas, dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications.* En effet; il existe toujours des quantités commensurables, a', b', c', etc., qui approchent autant que l'on veut des valeurs des facteurs incommensurables, a, b, c, etc.; faisant donc

$$(1)\ldots a = a' + \delta,\ b = b' + \delta',\ c = c' + \delta'',\ \text{etc.},$$

δ, δ', δ'', etc., seront des quantités incommensurables, que l'on pourra supposer aussi petites que l'on voudra, et l'on sera maître de prendre ces quantités avec le signe $+$ ou avec le signe $-$.

Cela posé; les produits $a \times b$, $b \times a$ sont égaux; car si cela n'était pas, on aurait, $ab = ba + r$, ou $ba = ab + r$; r désignant une quantité positive. La démonstration étant la même dans ces deux cas, soit $ab = ba + r$. On en déduirait,

---

(*) Une quantité *commensurable* est celle qui a une commune mesure avec l'unité. Une quantité *incommensurable*, est celle qui n'a aucune commune mesure avec l'unité; de sorte qu'en divisant l'unité en un nombre quelconque de parties égales, une de ces parties ne peut jamais être contenue un nombre exact de fois, dans la quantité incommensurable. Les fractions, les nombres entiers et décimaux, sont commensurables; $\sqrt{7}$ est incommensurable.

$$(2)\ldots(a'+\delta)(b'+\delta')=(b'+\delta')(a'+\delta)+r.$$

Effectuant les multiplications indiquées et observant que $a'b'=b'a'$ (n° 218), on trouverait

$$(3)\ldots(\delta b'-b'\delta)+(a'\delta'-\delta'a')+(\delta\delta'-\delta'\delta)=r.$$

Les quantités, δ, δ', étant aussi petites que l'on veut et les signes de ces quantités étant arbitraires, on pourrait toujours rendre le premier membre de l'équation (3) positif et plus petit que le second. L'équation (2) ne peut donc pas subsister quand r n'est pas nul; il est donc absurde de supposer les produits, ab, ba, inégaux; ces produits sont donc égaux. La même démonstration s'applique à un nombre quelconque de facteurs, en observant que le produit des facteurs commensurables, a', b', c', etc., ne change pas dans quelque ordre qu'on effectue la multiplication (n° 218).

220. Les principes des n°s 218 et 219 démontrent que *le produit de plusieurs facteurs, commensurables ou incommensurables, ne change pas, dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications.*

221. *Remarque.* En général, *les propriétés qui sont démontrées pour des quantités commensurables, conviennent aux quantités incommensurables,* car il existe toujours des quantités commensurables qui approchent autant que l'on veut des quantités incommensurables.

222. *Pour multiplier un nombre par un produit, il suffit de multiplier successivement ce nombre par les facteurs du produit. Et réciproquement, multiplier un nombre successivement par les facteurs d'un produit, revient à multiplier ce nombre par le produit.* En effet; désignez le nombre donné par n, et le produit donné par p; si les facteurs de p sont, a, b, c,... l, m, vous aurez (n° 220),

$$n\times p=p\times n=a\times b\times c\ldots\times l\times m\times n=n\times a\times b\times c\ldots\times l\times m$$
$$n\times a\times b\times c\ldots\times l\times m=a\times b\times c\ldots\times l\times m\times n=p\times n=n\times p.$$

Ce qui démontre le principe énoncé.

223. *Un produit ne peut jamais contenir plus de chiffres qu'il n'y en a dans tous ses facteurs réunis. Le nombre des chiffres de ce produit ne peut être moindre que le nombre total des chiffres des facteurs, diminué du nombre des facteurs et augmenté d'un.* En effet; si l'on désigne le produit par p, les facteurs par, a_1, a_2, a_3,..., a_n, les nombres de chiffres contenus dans ces facteurs par, α, β, γ,..., ω, le nombre total des chiffres contenus dans les n facteurs par s et la *base* du système de numération par b, il s'agira de prouver que l'on a toujours

$$p<b^s \quad \text{et} \quad p>b^{s-n},$$

car b^s exprimant l'unité suivie de s zéros, les nombres moindres que b^s ne pourront contenir que s chiffres au plus, et b^{s-n} étant égal à l'unité

suivie de $(s-n)$ zéros, tout nombre plus grand que b^{s-n}, renfermera au moins $(s-n+1)$ chiffres. Cela posé; le facteur a_1, contenant α chiffres, sera plus petit que l'unité suivie de α zéros sur la droite, ou que b^{α}, et plus grand que l'unité suivie de $(\alpha-1)$ zéros, ou que $b^{\alpha-1}$; on aura donc

$$a_1<b^{\alpha};\quad a_2<b^{\beta};\quad a_3<b^{\gamma};\ \ldots;\quad a_n<b^{\omega},$$
$$a_1>b^{\alpha-1};\ a_2>b^{\beta-1};\ a_3>b^{\gamma-1};\ \ldots;\ a_n>b^{\omega-1}.$$

Multipliant ces inégalités membre à membre, et observant que..... $a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_n=p$, on en déduira

$$p<b^{\alpha}\times b^{\beta}\times b^{\gamma}\times\ldots\ldots\ldots\times b^{\omega},\quad \text{ou } p<b^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\omega} \text{ ou } p<b^{s}$$
$$p>b^{\alpha-1}\times b^{\beta-1}\times b^{\gamma-1}\times\ldots\times b^{\omega-1},\ \text{ou } p>b^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\omega-n} \text{ ou } p<b^{s-n}$$

ce qui démontre le principe énoncé.

224 *La* PUISSANCE *n, d'un nombre entier* N *composé de m chiffres, ne peut jamais contenir plus de m × n chiffres; elle contient au moins* $(mn-n+1)$ *chiffres.* En effet; la *puissance n* du nombre N, étant le produit de *n* facteurs égaux à N, le nombre total de chiffres contenus dans les *n* facteurs est mn; le produit ne peut donc jamais contenir plus de mn chiffres; il contient au moins $mn-n+1$ chiffres (n° 223).

225. PROBLÈME. *Connaissant la puissance n d'un nombre entier, déterminer combien ce nombre contient de chiffres.* La solution de ce problème se déduit du principe précédent, car les expressions, mn, $mn-n+1$, étant équivalentes à m fois n et à $(m-1)$ fois n, plus 1; on voit que *la puissance n* d'un nombre de m chiffres, ne peut jamais contenir plus de m tranches de n chiffres, et qu'en partageant le nombre qui exprime cette *puissance* en $(m-1)$ tranches de n chiffres, il restera au moins un chiffre. Par conséquent, *si la puissance n d'un nombre de m chiffres, est* N, *en partageant* N *en tranches de n chiffres, à partir de la droite, le nombre des tranches sera m; la première tranche à gauche pourra ne contenir qu'un seul chiffre.*

226. En général; *pour déterminer combien la racine du degré n, d'un nombre entier* N, *contient de chiffres, il suffit de diviser* N, *en tranches de n chiffres, à partir de la droite (la dernière tranche à gauche peut ne contenir qu'un seul chiffre); le nombre des tranches, exprime le nombre des chiffres de la racine.* Ainsi, par exemple, la racine cinquième de 70 15833 71424, contiendra trois chiffres. Cette racine est 234.

227. *Lorsque n est un nombre entier, tous les nombres* PAIRS *sont représentés par* $2n$, *et* $2n+1$ *désigne un nombre* IMPAIR *quelconque*, car en donnant successivement à n, les valeurs, 0, 1, 2, 3, etc., l'expression $2n$ détermine les *nombres pairs*, 0, 2, 4, 6, etc.; et $2n+1$ donne les *nombres impairs*, 1, 3, 5, 7, etc.

228. *Le produit de deux nombres pairs est divisible par* 4, car ce produit est de la forme, $2n \times 2n'$ ou $4nn'$ (n et n' sont des nombres entiers).

229. *Le produit d'un nombre pair, par un nombre impair, est un nombre pair*, car

$$2n \times (2n' + 1) = (2nn' + n) \times 2.$$

230. *Le produit de deux nombres impairs est un nombre impair*, car

$$(2n + 1) \times (2n' + 1) = 2(2nn' + n' + n) + 1.$$

231. *Lorsque tous les facteurs d'un produit sont des nombres impairs, ce produit est un nombre impair* (n° 230).

232. *Quand un des facteurs d'un produit est un nombre pair, le produit est un nombre pair*, car ce produit est de la forme $n' \times 2n$.

233. *Pour qu'un produit soit un nombre impair, il faut que tous ses facteurs soient des nombres impairs*, car l'un des facteurs étant un nombre pair, le produit serait un nombre pair (n° 232).

234. *Pour qu'un produit soit un nombre pair, il faut qu'un des facteurs soit un nombre pair*, car le produit de plusieurs nombres impairs, est un nombre impair (n° 231).

235. *Le reste d'une division ne change pas, lorsque le dividende augmente ou diminue d'un multiple du diviseur.* En effet; si la division de a par b, donne le quotient q et le reste r; on aura

$$a = bq + r;\ r < b;\ (a \pm mb) = (q \pm m)\, b + r.$$

La comparaison de ces deux équations démontre le principe énoncé, car on voit que la division de a par b, donnant le quotient q et le reste r, la division de $(a \pm mb)$, par b, donne le quotient $(q \pm m)$ avec *le même reste* r.

236. Les recherches relatives à la *divisibilité des nombres*, conduisent à ce problème général : *connaissant un nombre entier* N, *dans le système dont la base est* b, *déterminer le reste de la division de* N, *par le nombre entier* d, *sans effectuer la division.* Le diviseur d pouvant être plus grand ou plus petit que la *base*, nous examinerons successivement ces deux cas. Si en partant de la droite du nombre N, les chiffres sont c, c_1, c_2, c_3, etc. ; on aura

$$N = c + c_1 b + c_2 b^2 + c_3 b^3 + \text{etc.}$$

237. 1er CAS. Quand le diviseur d, sera moindre que la base b, en désignant la différence $(b - d)$ par δ, on aura

$$(b - d) = \delta, \quad \text{d'où} \quad b - \delta = d,$$

et l'on pourra mettre le nombre N, sous cette forme,

$$N = (c + c_1\delta + c_2\delta^2 + \text{etc.}) + c_1(b - \delta) + c_2(b^2 - \delta^2) + \text{etc.}$$

Les *binomes*, $(b - \delta)$, $(b^2 - \delta^2)$, $(b^3 - \delta^3)$, etc., étant divisibles par

$(b-\delta)$ ou par d, le nombre donné est un multiple de d, augmenté de $(c+c_1\delta+c_2\delta^2+\text{etc.})$. Le *reste* de la division de N par d, sera donc le même que celui de la division du nombre $(c+c_1\delta+c_2\delta^2+\text{etc.})$ par d (n° 235). On en déduit cette règle générale :

238. *Pour trouver le reste de la division d'un nombre entier* N *par un diviseur* d, *moindre que la base* b, *prenez la différence* δ, *entre* b *et* d; *multipliez le premier chiffre à droite du nombre donné* N, *par* 1, *le deuxième par* δ, *le troisième par* δ^2, *et ainsi de suite jusques au dernier chiffre; calculez la somme* N′ *de ces produits; le reste de la division de* N *par* d, *sera le même que celui de* N′ *par* d. *Opérant donc sur* N′, *comme on a opéré sur* N, *et continuant le calcul jusqu'à ce qu'on obtienne une somme moindre que* b, *cette dernière somme, diminuée du plus grand multiple de* b *qu'elle pourra contenir, exprimera le reste de la division de* N *par* d.

239. *Exemple.* La base étant dix, pour trouver le reste de la division d'un nombre par 9, on fera $b=10$ et $\delta=1$; alors N′ deviendra la somme des chiffres du nombre donné. On en déduit cette règle générale, relative au système décimal :

Pour trouver le reste de la division d'un nombre entier, par 9; *additionnez les chiffres du nombre proposé, comme des unités simples. Quand la somme des chiffres sera moindre que* 9, *elle exprimera le reste cherché : lorsqu'elle sera égale à* 9, *le reste sera zéro : quand elle surpassera* 9, *on opérera sur elle comme sur le nombre proposé, en additionnant les chiffres, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne à une somme qui n'excède pas* 9; *si cette dernière somme est moindre que* 9, *elle exprimera le reste de la division du nombre proposé par* 9; *si elle est égale à* 9, *le reste sera zéro, et le nombre proposé sera divisible par* 9. *Dans les additions successives, on peut omettre tous les* 9. Ainsi, pour obtenir le reste de la division de 3509/1009, par 9, on dira : 3 et 5 font 8 et 6 font 14; 1 et 4 font 5; le reste demandé est donc 5.

240. 2e CAS. Lorsque le diviseur d sera plus grand que la base b, en désignant la différence $d-b$ par δ, on aura $d=\delta+b$, et l'on pourra mettre le nombre donné N sous cette forme....

$$N=(c-c_1\delta+c_2\delta^2-c_3\delta^3+\text{etc.})+c_1(b+\delta)+c_2(b^2-\delta^2)+c_3(b^3+\delta^3)+\text{etc.}$$

Les binomes, $(b+\delta)$, $(b^2-\delta^2)$, $(b^3+\delta^3)$, etc., étant divisibles par $(b+\delta)$, c'est-à-dire par d, le nombre N est de la forme

$$N=(c+c_2\delta^2+c_4\delta^4+\text{etc.})-(c_1\delta+c_3\delta^3+c_5\delta^5+\text{etc.})+md;$$

m étant un nombre entier positif qui désigne le quotient exact de la division de, $c_1(b+\delta)+c_2(b^2-\delta^2)+c_3(b^3+\delta^3)+\text{etc.}$, par d.

Faisant donc $m = p + q$, on pourra regarder p et q comme des nombres entiers positifs, p sera une indéterminée moindre que m ou égale à m, et q sera égal à $m - p$. On aura

$$N = (c + c_2\delta^2 + c_4\delta^4 + \text{etc.}) + pd - (c_1\delta + c_3\delta^3 + c_5\delta^5 + \text{etc.}) + qd.$$

et le nombre N étant positif, on pourra toujours donner à l'indéterminée p, une valeur entière positive telle que.....

$$(c + c_2\delta^2 + c_4\delta^4 + \text{etc.}) + pd - (c_1\delta + c_3\delta^3 + c_5\delta^5 + \text{etc.}),$$

soit un nombre entier positif. Désignant ce nombre par N′, on aura $N = N' + qd$. De sorte que le *reste* de la division de N par d, sera le même que celui de N′ par d (n° 235). On en déduit cette règle générale :

241. *Pour trouver le reste de la division d'un nombre entier* N, *par un diviseur* d, *plus grand que la base* b ; *prenez la différence* δ *entre* d *et* b; *multipliez le premier chiffre à droite de* N *par* 1, *le troisième par* δ^3, *le cinquième par* δ^4, *et ainsi de suite ; de la somme de ces produits, augmentée s'il le faut d'un multiple de* d, *retranchez la somme des chiffres de rang pair multipliés respectivement par* δ, *par* δ^3, *par* δ^5, *etc. ; si* N′ *désigne le résultat de cette soustraction, le reste de la division de* N *par* d, *sera le même que celui de* N′ *par* d. *Opérant donc sur* N′, *comme vous avez opéré sur* N, *et continuant les calculs jusqu'à ce que vous obteniez un nombre* r, *moindre que* d, *le nombre* r *sera le reste de la division de* N *par* d. Ainsi, la base étant dix, pour trouver le reste de la division d'un nombre N, par 11, on fera $b = 10$, $d = 11$, et $\delta = 1$; la valeur de N′ deviendra

$$N' = (c + c_2 + c_4 + \text{etc.}) + pd - (c_1 + c_3 + c_5 + \text{etc.}).$$

Ce qui démontre cette règle générale : *Pour trouver, dans le système décimal, le reste de la division d'un nombre entier* N, *par* 11 ; *ajoutez deux sommes, l'une des chiffres de rang impair, à partir de la droite de* N, *l'autre des chiffres de rang pair ; de la première somme, augmentée quand cela est nécessaire d'un multiple de* 11, *retranchez la seconde somme. Opérez sur le reste* N′ *de cette soustraction, comme sur* N, *et ainsi de suite, jusqu'à ce que vous parviennez à un reste moindre que* 11 ; *ce dernier reste exprimera le reste demandé.* Par exemple, le reste de la division de 5678 par 11, sera $(+6) - (7 + 5)$, ou 2. Le reste de la division de 46781 par 11, sera $(+7 + 4) + 11 - (8 + 6)$, ou 9.

242. Pour *déterminer tous les diviseurs premiers d'un nombre donné* on essaiera la division de ce nombre par les *nombres premiers*, 2, 3, 5, 7, etc., le plus petit des nombres *premiers* qui divisent N, est α, on divisera par α, ce qui donnera un quotient N′ ; on divisera N′ par α, et l'on continuera à diviser les quotiens successifs par α, jusqu'à ce que la division

ne réussisse plus. Si après m divisions par α, le quotient P n'est plus divisible par α, on aura $N = P\alpha^m$, et N n'étant divisible par aucun nombre premier moindre que α, les nombres premiers qui pourront diviser P, seront plus grands que α. Essayant la division du nombre P, par les nombres premiers plus grands que α; si ζ désigne le plus petit des nombres premiers qui divisent P, on trouvera, comme pour le nombre N, que $P = \zeta^n Q$; d'où $N = P\alpha^m = \alpha^m \zeta^n Q$. Le nombre Q ne sera divisible que par des nombres premiers plus grands que α et β. Continuant à opérer de la même manière, on trouvera

$$N = \alpha^m \beta^n \gamma^r \delta^s \text{ etc.}; \text{ on aura } \beta > \alpha,\ \gamma > \beta,\ \delta > \gamma, \text{ etc.}$$

α, β, γ, δ, etc., seront les *facteurs* ou *diviseurs premiers* du nombre N. On en déduira

$$360 = 2^3.3^2.5^1;\ 144 = 2^4.3^2;\ 67500 = 2^2.3^3.5^4;\ 77175 = 3^3.5^2.7^3.$$

243. *Lorsqu'après avoir essayé la division du nombre entier* N, *par tous les nombres premiers moindres que* $(1 + \sqrt{N})$, *aucun de ces nombres ne divise* N; *on est certain que* N *est un nombre premier.* En effet; si N, pouvait être divisible par un nombre premier p, plus grand que $\sqrt{N}$, en désignant le quotient par q, on aurait

$$N = pq \text{ et } p > \sqrt{N};\ \text{d'où } pq > q\sqrt{N},\ N > q\sqrt{N} \text{ et } \sqrt{N} > q.$$

N serait donc divisible par un nombre q, moindre que $\sqrt{N}$; ce qui est contre l'hypothèse. Le principe est donc démontré. Par exemple, 113 n'étant divisible par aucun des nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, moindres que $1 + \sqrt{113}$, on peut en conclure que 113 est un *nombre premier*. On trouvera de cette manière, que les *nombres premiers* sont

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, etc.

244. *Le nombre entier* N *étant ramené à la forme*, $\alpha^m \beta^n \gamma^r$ etc., et les *nombres premiers*, α, β, γ, *étant inégaux*, *pour obtenir tous les diviseurs de* N, *il suffit de former le produit*

$$(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^m)(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^n)(1+\gamma+\gamma^2+\ldots+\gamma^r)\text{ etc.}$$

tous les termes de ce produit seront les diviseurs du nombre N. *L'unité et le nombre* N *se trouveront parmi ces diviseurs.* Cela est évident, car le nombre N étant de la forme, $\alpha^m \beta^n \gamma^r$ etc., on obtient tous les diviseurs de N, en mettant successivement pour les exposans, m, n, r, etc., les nombres entiers, 1, 2, 3, etc., qui ne surpassent pas, m, n, r, etc., et toutes ces valeurs du produit, $\alpha^m \beta^n \gamma^r$ etc., sont exprimées par les termes du produit que nous avons indiqué. Tous ces produits sont différens.

245. Le produit des facteurs $(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6+\ldots+\alpha^m)$,

$1 + \beta + \beta^2 + \ldots + \beta^n$), etc., renferme $(m+1)(n+1)$ etc., *termes différens*. En effet; le premier facteur contenant $(m+1)$ termes, la multiplication du premier facteur, par chaque terme du second facteur, fournit $(m+1)$ termes au produit; mais le second facteur contient $(n+1)$ termes; le produit des deux premiers facteurs sera donc composé de $(m+1)(n+1)$ termes. Ce produit, multiplié par le troisième facteur, renfermera donc $(m+1)(n+1)(r+1)$ termes; et ainsi de suite. On en déduit cette règle générale :

246. *Pour déterminer combien un nombre entier a de diviseurs; décomposez ce nombre en ses facteurs premiers; ajoutez l'unité à chacun des exposans de ces facteurs; le produit des sommes qui en résulteront, exprimera le nombre cherché* (nos 244, 245). Ainsi, par exemple, le nombre 360 étant égal à, $2^3 \times 3^2 \times 5^1$; le nombre des diviseurs de 360, sera $(3+1)(2+1)(1+1)$, ou 24. Et en effet; si l'on forme le produit,

$$(1+2+2^2+2^3)\times(1+3+3^2)\times(1+5)$$

on verra que les diviseurs de 360, sont les 24 nombres,

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18,$$
$$20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.$$

On reconnaîtra de même, que les 15 diviseurs de 144, sont

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144.$$

* 247. *On propose de composer un nombre qui, admette δ diviseurs.* Ce problème est indéterminé, car en désignant par, α, β, γ, etc., les facteurs premiers du nombre demandé, ce nombre sera de la forme, $\alpha^m \beta^n \gamma^r$ etc.; les facteurs premiers, α, β, γ etc., seront arbitraires, et les exposans inconnus, m, n, r, etc., ne seront assujétis qu'à la condition.....

$$(1)\ldots(m+1)(n+1)(r+1)\text{ etc.} = \delta, \text{ (n° 246).}$$

Si les facteurs premiers du nombre demandé, doivent être les plus petits possible, ce nombre sera de la forme $2^m \times 3^n \times 5^r$ etc.; par exemple, pour composer un nombre qui admette 15 diviseurs, on pourra prendre $2^4 \times 3^2$, ou 144, car le nombre des diviseurs de 144 sera $(4+1)\times(2+1)$, ou 15. Il est facile de prouver que 144 est le plus petit des nombres qui admettent 15 diviseurs.

* 248. *Lorsque δ est un nombre premier, le nombre* N, *qui a δ diviseurs, est égal à la puissance $\alpha^{\delta-1}$, d'un nombre premier quelconque α,* car $(m+1)(n+1)(r+1)$ etc., étant un nombre premier, les exposans n, r, etc., doivent être nuls. La plus petite valeur de N sera $2^{\delta-1}$. Ainsi, le plus petit des nombres qui admettent 7 diviseurs, est 2^6, ou 64.

249. *Le quarré d'un nombre entier admet toujours un nombre impair de diviseurs. Un nombre qui n'est pas un quarré a un nombre pair de diviseurs. La réciproque est vraie.* En effet; le nombre donné N, étant

ramené à la forme, $\alpha^m \beta^n \gamma^r$ etc. ; le nombre δ, des diviseurs de N, est déterminé par la formule

$$\delta = (m+1)\ (n+1)\ (r+1) \text{ etc.}$$

Lorsque N est un quarré, les exposans, m, n, r, etc., sont des nombres pairs ; δ est donc impair (n° 231). Quand N, n'est pas un quarré, l'un des exposans, m, n, r, etc., est impair ; δ est donc un nombre pair, car un des facteurs est pair (n° 232).

Réciproquement. Lorsque δ est un nombre impair, $(m+1)(n+1)$ etc., est impair ; m, n, etc., sont donc pairs (n° 233) ; $\alpha^m \beta^n$ etc., est donc un quarré. Quand δ est un nombre pair, $(m+1)(n+1)$ etc., est pair ; l'un des exposans, m, n, r, etc., est donc impair (n° 234) ; de sorte que le nombre donné n'est pas un quarré. Ainsi, le quarré 144 a 15 diviseurs, et le nombre 360, ayant 24 diviseurs, on peut en conclure que 360 n'est pas un quarré.

* 250. *Déterminer de combien de manières différentes, on peut décomposer un nombre entier positif* N, *en deux facteurs ; ces facteurs doivent être des nombres entiers positifs.* Désignez l'inconnue du problème par x, et le nombre des diviseurs de N, par δ.

Lorsque δ sera un nombre pair $2n$, le nombre N ne sera pas un quarré (n° 249) ; la division de N, par un nombre quelconque, donnera donc un quotient qui ne sera pas égal au diviseur ; prenant n diviseurs différens, d_1, d_2, d_3, ..., d_n, et divisant N par chacun de ces diviseurs, on obtiendra n quotiens différens, q_1, q_2, q_3, ..., q_n ; ce qui donnera

$$N = q_1 d_1 = q_2 d_2 = q_3 d_3 = \ldots = q_n d_n.$$

On trouvera donc, n produits qui seront égaux à N ; donc $x = n = \frac{1}{2}\delta$.

Quand δ sera un nombre impair, $2n+1$; N sera un quarré p^2 ; divisant N, par n diviseurs, d_1, d_2, d_3, d_n, moindres que p, on obtiendra n quotiens, q_1, q_2, q_3, ... q_n, plus grands que p ; on aura donc

$$N = p \times p = q_1 d_1 = q_2 d_2 = q_3 d_3 = \ldots = q_n d_n$$

Ce qui donnera $n+1$ produits égaux à N. Donc, $x = n+1 = \frac{1}{2}(\delta+1)$.

Ainsi, 360 ayant 24 diviseurs (n° 246), on peut décomposer 360, en deux facteurs, de 12 manières différentes ; 144 ayant 15 diviseurs (n° 246), on peut décomposer 144, en deux facteurs, de 8 manières différentes. Et en effet ;

$$360 = 1 \times 360 = 2 \times 180 = 3 \times 120 = 4 \times 90 = 5 \times 72 = 6 \times 60$$
$$= 8 \times 45 = 9 \times 40 = 10 \times 36 = 12 \times 30 = 15 \times 24 = 18 \times 20,$$
$$144 = 1 \times 144 = 2 \times 72 = 3 \times 48 = 4 \times 36 = 6 \times 24 = 8 \times 18$$
$$= 9 \times 16 = 12 \times 12.$$

Remarque. La solution précédente donne le moyen de *trouver toutes ses solutions en nombres entiers positifs, de l'équation indéterminée,* $y = N$, *dans laquelle* N *est un nombre entier positif connu.*

251. *Lorsqu'une fraction* $\frac{B}{A}$, *est égale à une fraction irréductible* $\frac{b}{a}$; *les deux termes de la première fraction, sont respectivement égaux aux deux termes de la seconde, multipliés par un même nombre entier n.* De sorte que l'on a, $B = bn$ et $A = an$. En effet;

$$\text{l'équation, } \frac{B}{A} = \frac{b}{a}, \text{ donnant } \frac{B}{b} = \frac{A}{a},$$

il suffit de prouver que b divise exactement B. Cela posé; *si* B *n'était pas exactement divisible par* b, la division de B par b, fournirait un quotient entier q, avec un reste r, et $\frac{A}{a}$ étant égal à $\frac{B}{b}$, la division de A par a, conduirait au même quotient entier q, avec un reste r'. On aurait donc

$$\frac{B}{b} = q + \frac{r}{b} \text{ et } \frac{A}{a} = q + \frac{r'}{a}.$$

Or, $\frac{B}{b} = \frac{A}{a}$; donc $\frac{r}{b} = \frac{r'}{a}$. D'où $\frac{b}{a} = \frac{r}{r'}$

Mais, les restes, r, r', sont respectivement moindres que les diviseurs b et a. La fraction irréductible $\frac{b}{a}$ serait donc exprimée par une fraction $\frac{r}{r'}$, dont les termes seraient moindres; ce qui est absurde, (n° 52). Or, cette absurdité résulte de l'hypothèse que b ne divise pas exactement B; on doit donc en conclure que B est exactement divisible par b. Désignant le quotient de cette division par n, on aura

$$\frac{B}{b} = n = \frac{A}{a}; \text{ d'où } B = bn \text{ et } A = an.$$

Ce qui démontre le principe énoncé.

252. *Les seules opérations qui n'altèrent pas la valeur d'une fraction, sont donc la multiplication et la division de ses deux termes, par un même nombre* (n° 251).

253. *Une fraction est irréductible, quand ses deux termes n'ont aucun facteur commun.* En effet; si A et B étant premiers entr'eux, la fraction $\frac{B}{A}$ n'était pas irréductible, il existerait une fraction irréductible $\frac{b}{a}$, qui serait égale à $\frac{B}{A}$; les termes b et a, seraient respectivement moindres que B et A. Mais, le principe du n° 251, donnerait $B = bn$, $A = an$; n désignant un nombre entier positif. Les quantités, B, A, auraient donc un facteur commun n; ce qui est contre l'hypothèse. La fraction $\frac{B}{A}$ est donc irréductible.

254. *Le produit* $\alpha \times \beta$ *étant divisible par* γ *et* γ *n'ayant aucun facteur commun avec* β; *on peut en conclure que* γ *divise exactement* α. En effet; si le quotient de la division de $\alpha\beta$ par γ, est q, on aura $\alpha\beta = \gamma q$; d'où $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{q}{\alpha}$. Or, β et γ étant premiers entr'eux, la fraction $\frac{\beta}{\gamma}$ est irréductible (n° 253). On a donc, $q = \beta n$ et $\alpha = \gamma n$ (n° 251); γ divise donc exactement α. Ce qui démontre le principe énoncé.

255. *Lorsqu'un nombre premier* α, *divise* β^m, *on est certain que* α *divise* β. En effet; si α ne divisait pas β, α et β seraient premiers entr'eux. Or, β^m est le produit de β^{m-1} par β, et α divise ce produit; α diviserait donc β^{m-1} (n° 254). On en déduirait successivement que α diviserait β^{m-2}, $\beta^{m-3}, \ldots, \beta^2$ et β. Ce qui est contre l'hypothèse. Il est donc absurde de supposer que α divisant β^m, ne divise pas β. Par conséquent, α divise β. Ce qui démontre le principe énoncé.

256. *Quand la fraction* $\frac{b}{a}$ *est irréductible, la fraction* $\frac{b^m}{a^n}$ *est également irréductible.* En effet; si la fraction $\frac{b^m}{a^n}$ n'était pas irréductible, ses deux termes seraient divisibles par un nombre premier α (n° 252); α diviserait donc b et a (n° 255); la fraction $\frac{b}{a}$ ne serait donc pas irréductible; ce qui est contre l'hypothèse. La fraction $\frac{b^m}{a^n}$ est donc irréductible.

257. *Toutes les puissances d'une fraction irréductible, sont des fractions irréductibles* (n° 256).

* 258. *Lorsque* α *et* β *sont des nombres entiers, premiers entr'eux, les divisions des multiples,* $1\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots, (\beta-1)\alpha$, $\beta\alpha$, *par* β, *donnent nécessairement,* $1, 2, 3, \ldots, \beta-1, 0$, *pour restes. Les restes peuvent se présenter dans un autre ordre, mais on est sûr d'obtenir tous ces restes* (*). Le principe sera démontré, si les β restes sont différens. Or, *on ne peut trouver deux restes égaux*; en effet, si γ et γ' désignant des nombres entiers, moindres que β, les divisions de $\gamma\alpha$ et de $\gamma'\alpha$, par β, donnaient deux restes égaux à r; en représentant les quotiens par q et q', on aurait,

$$\gamma\alpha = \beta q + r \text{ et } \gamma'\alpha = \beta q' + r; \text{ d'où}$$

$$(\gamma - \gamma')\alpha = (q - q')\beta \text{ et } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma - \gamma'}{q - q'}.$$

(On suppose $\gamma > \gamma'$). Or, α et β étant premiers entr'eux, la fraction $\frac{\beta}{\alpha}$

(*) β et α étant premiers entr'eux, β ne peut diviser exactement aucuns des multiples, $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots, (\beta-1)\alpha$. La division de $\beta\alpha$ par β, donnera le reste 0.

st irréductible (n° 253); d'ailleurs $\gamma - \gamma'$ est moindre que ζ; la fraction réductible $\frac{\zeta}{\alpha}$ serait donc égale à une fraction qui aurait des termes moindres; ce qui est absurde (n° 52). On ne peut donc pas trouver deux restes égaux. Ce qui démontre le principe énoncé. Par exemple, 5 et 7 étant premiers entr'eux, si on divise, 5, 5×2, 5×3, 5×4, 5×5, 5×6, 5×7, par 7, les restes seront, 5, 3, 1, 6, 4, 2, 0; on trouve donc effectivement les restes, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Si l'on divisait les nombres, 7, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, par 5, on obtiendrait les restes inégaux, 2, 4, 1, 3, 0.

259. Comme *en avançant successivement d'un rang vers la droite d'un nombre écrit dans le système dont la base est b, les unités deviennent de b en b fois plus petites*, le premier chiffre, à droite de la *virgule* (*), exprime des unités dont la valeur est $\frac{1}{b}$; chaque unité du chiffre suivant, vaut $\frac{1}{b^2}$; et ainsi de suite. Par exemple,

$$(567{,}8923)_b = 5b^2 + 6b + 7 + \frac{8}{b} + \frac{9}{b^2} + \frac{2}{b^3} + \frac{3}{b^4}$$

Si l'on introduit des exposans négatifs, on aura

$$(567{,}8923)_b = 5b^2 + 6b^1 + 7b^0 + 8b^{-1} + 9b^{-2} + 2b^{-3} + 3b^{-4}.$$

260. *Lorsqu'on avance la virgule de α rangs vers la droite ou vers la gauche d'un nombre écrit dans le système dont la base est b, on multiplie ou on divise ce nombre par b^α*, car les chiffres, avançant de α rangs vers la gauche ou vers la droite, expriment des unités b^α fois plus grandes ou plus petites.

261. *Quand le chiffre des unités d'un nombre* N, *est suivi de α chiffres sur la droite, ce nombre est exprimé par une fraction ordinaire, dont le numérateur est le nombre donné dans lequel on a fait abstraction de la virgule, et dont le dénominateur est l'unité suivie de α zéros ou b^α*, car en supprimant la virgule, on multiplie le nombre N, par b^α (n° 260); le résultat divisé par b^α, exprime donc la valeur de N.

262. Réciproquement, *lorsque le dénominateur d'une fraction, est l'unité suivie de α zéros, vers la droite, ou b^α, on peut mettre cette fraction sous la forme d'un nombre entier, il suffit pour cela d'écrire le numérateur et de placer la virgule sur la gauche des α premiers chiffres à droite*, car la valeur du dénominateur étant b^α, si on suppri-

(*) On distingue le chiffre des unités par une virgule, placée sur sa droite (n° 65).

mait le dénominateur, le résultat serait b^{α} fois trop grand; on doit donc diviser ce résultat par b^{α}; ce qui revient à séparer par la virgule, α chiffres sur la droite du numérateur (n° 260). Ainsi,

$$\left(\frac{2}{100}\right)_b = (0{,}02)_b\,;\ \left(\frac{34567}{1000}\right)_b = (34{,}567)_b\,;\ \left(\frac{23}{100000}\right)_b = (0{,}00023)_b$$

263. *Quand le dénominateur α, d'une fraction $\frac{C}{\alpha}$, n'est pas l'unité suivie de plusieurs zéros sur la droite; pour mettre cette fraction sous la forme d'un nombre entier, divisez C par α; parvenu au chiffre des unités, mettez une virgule sur sa droite et convertissez les restes successifs en unités de b en b fois plus petites, (ce qui revient à multiplier chaque reste par la base b). Divisez ces dividendes, par le dénominateur; les quotiens successifs, seront les chiffres qui doivent suivre la virgule dans le quotient total.* En effet; lorsqu'on est parvenu au chiffre des unités du quotient, le *reste* est moindre que le diviseur α; multipliant ce reste, par b, le dividende partiel qui en résulte exprime des unités b fois plus petites que les unités simples; le quotient exprime donc des unités b fois plus petites que les unités simples, c'est-à-dire des unités du premier ordre à droite de la virgule. Pour obtenir le second chiffre à droite de la virgule, il suffit de convertir le dernier reste, en unités b fois plus petites, ce qui revient à multiplier ce reste par b. Divisant le produit par α, on trouvera un quotient et un reste moindres que b; ce quotient sera le second chiffre, à droite de la virgule; le reste, multiplié par b et divisé par α, donnera le troisième chiffre à droite de la virgule; et ainsi de suite. Ce qui démontre la règle énoncée. On doit observer que pour convertir les *restes* successifs e unités de b en b fois plus petites, il suffit, lorsque ces *restes* sont écrits dans le système dont la base est b, de mettre un zéro sur la droite de chaque *reste*. Mais, afin d'exécuter les divisions avec plus de facilité, on écrir a tous les nombres, dans le système décimal (n° 213). En appliquant cette règle, on trouvera

$$\frac{7}{500} = 0{,}014\,,\ \left(\frac{7}{300}\right)_{12} = (0{,}024)_{12}\,;\ \left(\frac{26}{11}\right)_{12} = (2{,}38\ 38\ 38\text{etc.})_{12}$$

$$\left(\frac{26}{11000}\right)_{12} = (0{,}002\ 38\ 38\ 38\ \text{etc.})_{12}$$

264. La règle précédente, pouvant conduire à un quotient qui se termine ou qui ne se termine pas, nous allons faire voir que *pour découvrir si, A et B n'ayant aucuns facteurs communs, la division de B par A donnera un quotient exact ou indéfini, il suffit de décomposer A en ses facteurs premiers. Lorsque A ne renferme que les facteurs de la base b, le quotient est exact (n° 265); lorsque A contient d'autres facteurs premiers, le quotient est indéfini (n° 266) et périodique (n°s 267 et 268).* Démontrons ces propriétés.

265. *Quand le dénominateur d'une fraction irréductible* $\frac{B}{A}$, *ne renferme que les facteurs premiers de la base* b, *la division de* B *par* A, *donne un quotient exact, c'est-à-dire que la règle du n° 263, conduit au reste zéro.* Cela se réduit à démontrer qu'il existe toujours un facteur e, tel que $\frac{Be}{Ae}$ est de la forme $\frac{N}{b^c}$, N et c désignant des nombres entiers positifs, (n° 263). Pour déterminer le facteur e, on décomposera b et A en leurs facteurs premiers p, q (*), ce qui donnera,

$$b = p^{\alpha} q^{\beta}, \quad A = p^{m} q^{n}.$$

Or, quel que soit x, on a

$$\frac{B}{A} = \frac{Bp^{\alpha x} q^{\beta x}}{Ap^{\alpha x} q^{\beta x}} = \frac{Bp^{\alpha x} q^{\beta x}}{p^{m} q^{n} p^{\alpha x} q^{\beta x}} = \frac{Bp^{\alpha x - m} q^{\beta x - n}}{(p^{\alpha} q^{\beta})^{x}} = \frac{Bp^{\alpha x - m} q^{\beta x - n}}{b^{x}}.$$

Mais, il existe une infinité de valeurs entières positives de x, qui rendent, $\alpha x - m$ et $\beta x - n$, positifs. Désignant l'une de ces valeurs par c, le numérateur, $Bp^{\alpha c - m} q^{\beta c - n}$, sera un nombre entier positif N; on aura, $\frac{B}{A} = \frac{N}{b^{c}}$. Ce qui démontre le principe énoncé.

Remarque. L'équation $\frac{B}{A} = \frac{Bp^{\alpha x - m} q^{\beta x - n}}{b^{x}}$, ayant lieu quel que soit x, la règle du n° 262, fait voir, que *si* s *désigne la plus petite des valeurs entières positives de* x, *qui rendent*, $\alpha x - m$ *et* $\beta x - n$, *positifs* (**), *le quotient de la division de* B, *par* A, *renfermera* s *chiffres à droite de la virgule.* En effet; soit $x = s$; le numérateur, $Bp^{\alpha s - m} \times q^{\beta s - n}$, sera un nombre entier positif P; on aura,

$$\frac{B}{A} = \frac{P}{b^{s}}, \quad P = Bp^{\alpha s - m} q^{\beta s - n}, \quad b = p^{\alpha} q^{\beta}.$$

(*) Pour fixer les idées, on supposera (n°s 265, 266, 267 et 270), que la *base* b, ne renferme que deux facteurs premiers, p, q; les démonstrations seraient les mêmes, si le nombre des facteurs était différent.

(**) Cette valeur de x est facile à déterminer, car les binomes, $\alpha x - m$, $\beta x - n$, étant respectivement égaux à, $\alpha\left(x - \frac{m}{\alpha}\right)$ et à, $\beta\left(x - \frac{n}{\beta}\right)$, on voit que si $\frac{\gamma}{\delta}$ désigne la plus grande des fractions, $\frac{m}{\alpha}$, $\frac{n}{\beta}$, la division de γ par δ, donnera un quotient entier Q, avec un reste R, et selon que R sera nul ou ne sera pas nul, la valeur de s sera Q ou Q + 1. Cette valeur n'est jamais moindre que l'unité.

Les fractions, $\frac{B}{A}$, $\frac{P}{b^s}$, étant égales, le quotient de la division de P par A, est le même que celui de P par b^s. Or, ce dernier quotient renfermera s chiffres à droite de la virgule, si le premier chiffre à droite de P n'est pas zéro (n° 262). La question est donc réduite à prouver que *le premier chiffre à droite de* P, *n'est jamais un zéro.*

Si le premier chiffre à droite de P était zéro, P serait exactement divisible par b; le quotient serait un nombre entier E. On aurait,

$$E = Bp^{\alpha(s-1)-m} q^{\zeta(s-1)-n}.$$

Or, par hypothèse, A et B sont premiers entr'eux; les deux nombres, $\alpha s-m$, $\zeta s-n$, sont entiers positifs, l'un des deux nombres, $\alpha(s-1)-m$, $\zeta(s-1)-n$, est nécessairement négatif, et $s-1$ n'est jamais négatif. Par conséquent :

1°. Lorsque A renferme les deux facteurs, p, q; B ne contient aucun de ces facteurs; les exposans, $\alpha(s-1)-m$, $\zeta(s-1)-n$, seraient tous positifs; ce qui n'est pas possible;

2°. Lorsque A ne renferme qu'un seul des facteurs p et q, p par exemple, l'exposant $n=0$; $A=p^m$, B ne contient pas le facteur p, sans B pour renfermer le facteur q; on a donc,

$$B = B'q^s,\ E = B'p^{\alpha(s-1)-m} \times q^{\zeta(s-1)+s}.$$

(s désignant un nombre entier positif, qui peut être nul, et B' ne renfermant aucun des facteurs p et q de b). Les exposans, $\alpha(s-1)-m$, $\zeta(s-1)+s$, seraient donc positifs; $\alpha(s-1)-m$, $\zeta(s-1)-n$, seraient donc positifs, (car $n=0$ et $s-1$ n'est pas négatif). Ce qui est contraire à l'hypothèse.

Le premier chiffre à droite de P, n'est donc jamais zéro. Ce qui démontre le principe énoncé. On en déduit cette règle générale :

266. *Quand le dénominateur d'une fraction irréductible* $\frac{B}{A}$, *ne renferme que les facteurs premiers*, p, q, *de la base* b; *la division de* B *par* A (n° 263), *donne un quotient exact. Pour déterminer combien ce quotient contiendra de chiffres à droite de la virgule; décomposez* B *et* A, *en leurs facteurs premiers; vous trouverez*, $b=p^\alpha q^\zeta$, $A=p^m q^n$. *Soit* $\frac{\gamma}{\delta}$, *la plus grande des fractions*, $\frac{m}{\alpha}$, $\frac{n}{\zeta}$; *la division de* γ *par* δ *donnera un quotient entier* Q *et un reste* R. *Alors, selon que* R *sera nul ou ne sera pas nul, le nombre* s *des chiffres placés à droite de la virgule, dans le quotient de la division de* B *par* A, *sera* Q *ou* Q + 1.

267. *Lorsque le dénominateur d'une fraction irréductible* $\frac{B}{A}$, *contient*

:res facteurs premiers que ceux de la base, la division de B *par ne peut jamais conduire à un quotient exact.* En effet; si le quo- : était exact, il serait équivalent à une fraction $\frac{P}{Q}$, dont le dénomi- ur Q, serait l'unité suivie de plusieurs zéros vers la droite (n° 261); aurait, $Q = nA$ (n° 251), et cette égalité est impossible, car A, n, Q, des nombres entiers, Q ne renferme que les facteurs premiers, p, q, la base b, et A contient d'autres facteurs premiers. Le quotient ne : donc être exact. Ce qui démontre le principe énoncé. Nous allons ver (n°s 268 et 270), que ce quotient est périodique.

58. *Quand le dénominateur* A, *d'une fraction irréductible* $\frac{B}{A}$, *ne tient aucun des facteurs premiers de la base* b, *la division de ar* A, *conduit à un quotient périodique, dont la période commence premier chiffre à droite de la virgule.* En effet; la division de B A, donnera un quotient entier Q, et un reste R moindre que A; aura,

$$B = AQ + R, \quad \frac{B}{A} = Q + \frac{R}{A}.$$

a fraction $\frac{R}{A}$ est irréductible, car si elle ne l'était pas, A et R auraient facteur commun δ; ce facteur diviserait $AQ + R$; δ diviserait donc et B; $\frac{B}{A}$ ne serait donc pas une fraction irréductible; ce qui est contre rpothèse; la fraction $\frac{R}{A}$ est donc irréductible et moindre que l'unité. question est donc ramenée à démontrer que la division de R par A, nera un quotient périodique, dont la période commencera au premier ffre à droite de la virgule. Cela se réduit à prouver, que lorsqu'on par- ndra, pour la première fois, à un reste S, égal à l'un des précedens, reste sera nécessairement R. Cela posé; pour obtenir le quotient de la ision de R par A, on divisera (n° 263), R par A; o exprimera les ites du quotient et le 1er reste sera R; on divisera bR par A, ce qui nnera un quotient Q′ et un 2e reste R′; la division de bR′ par A, nnera un quotient Q″ et un 3e reste R″; divisant bR″ par A, on trou- ra un quotient Q‴ et un 4e reste R‴; et ainsi de suite. Enfin, soient r', r'', etc., des restes consécutifs d'un rang quelconque; si q' désigne quotient entier de la division de br par A, q'' celui de br' par A, etc.; aura (n° 30)

$$R' = bR - AQ', \; R'' = bR' - AQ'', \; R''' = bR'' - AQ''', \text{ etc.},$$
$$r' = br - Aq', \; r'' = br' - Aq'', \; r''' = br'' - Aq''', \text{ etc.}$$

Les restes étant des nombres entiers positifs, moindres que le diviseur A, a parviendra nécessairement à un reste déjà obtenu. Soit, $r''' = R'''$; on aura

$$bR'' - AQ''' = br'' - Aq'''; \quad \text{d'où,} \quad Q''' - q''' = \frac{b(R'' - r'')}{A}.$$

Or, $Q''' - q'''$ est un nombre entier ; A divise donc exactement le produit $b \times (R'' - r'')$. Mais, par hypothèse, A et b n'ont aucun facteur commun ; A divise donc $R'' - r''$; or $R'' - r''$ est moindre que A, car R'' et r'', sont moindres que A ; il faut donc que $R'' - r''$ soit nul. De sorte que l'hypothèse $r''' = R'''$, donne $r'' = R''$. Cette dernière équation donnerait $R' = r'$; et ainsi de suite, en remontant. On en déduit aisément que $S = R$. En effet ; supposons que les quatre premiers restes, R, R', R'', R''', étant inégaux, le 5e reste R'''' soit égal à l'un des précédens ; je dis que R'''' sera nécessairement égal à R, car, par exemple, si R'''' était égal à R'', le reste R''' serait égal à R' ; les restes qui précèdent R'''' ne seraient donc pas différens ; ce qui est contre l'hypothèse. Il faut donc que $R'''' = R$. Ce qui démontre le principe énoncé.

Remarque. *Lorsque le premier chiffre à droite de* B, *n'est pas zéro, le quotient entier* Q, *ne peut jamais être terminé vers la droite, par la période que donne la division de* B *par* A. En effet ; désignons, la période par P, et le nombre des chiffres de P, par p. Si Q était terminé par P, on aurait,

$$\frac{B}{A} = DP_{,}PPP \text{ etc. } (*).$$

Divisant les deux membres de cette équation, par b^p, il viendrait

$$\frac{B}{Ab^p} = D_{,}PPP \text{ etc.}$$

Retranchant ces égalités membre à membre, et observant que la différence $DP - D$, entre les seconds membres, est un nombre entier E, on aurait,

$$\frac{B}{A} - \frac{B}{Ab^p} = E ; \quad \text{d'où,} \quad \frac{B}{A} = \frac{Eb^p}{(b^p - 1)}.$$

Or, b^p et $b^p - 1$, n'ont jamais de facteurs communs ; B contiendrait donc le facteur b ; le premier chiffre à droite de B serait donc un zéro. Ce qui est contre l'hypothèse. Le principe énoncé est donc démontré. On en déduit cette autre propriété :

269. *Quand une fraction irréductible* $\frac{B}{A}$, *est telle, que son dénominateur* A *ne renferme aucun des facteurs premiers de la base* b, *et*

(*) Par exemple, si $\frac{B}{A} = 837_{,}37\ 37\ 37\ 37$ etc. ; on aura, $D = 8$, $P = 37$, $p = 2$, $Q = DP = 837$, $\frac{B}{Ab^p} = D_{,}PP$ etc. $= 8_{,}37\ 37$ etc.

On fera usage de la même notation, dans les nos 271 et 273.

ue le premier chiffre à droite de son numérateur B, *n'est pas zéro ; i division de* B *par* A, *donne un quotient périodique, dont la période ommence au premier chiffre à droite de la virgule, et en avançant a virgule de* α *rangs vers la gauche, le résultat renferme nécessaiement* α *chiffres entre la virgule et la première période.*

270. *Lorsque le dénominateur d'une fraction irréductible* $\frac{M}{N}$, *contient les facteurs premiers de la base* b, *combinés avec d'autres facteurs premiers, le quotient est indéfini et périodique, mais la période ne commence pas au premier chiffre à droite de la virgule. Pour découvrir combien il y aura de chiffres, entre la virgule et la première période, décomposez* b *et* N, *en leurs facteurs premiers; vous trouverez,*

$$b = p^{\alpha} q^{\zeta}, \quad N = Ap^{m} q^{n},$$

A *désignant le produit des facteurs premiers de* N, *autres que* p *et* q. *Soit* $\frac{\gamma}{\delta}$, *la plus grande des fractions,* $\frac{m}{\alpha}$, $\frac{n}{\zeta}$; *la division de* γ *par* δ, *donnera un quotient entier* Q *et un reste* R. *Alors, selon que* R *sera nul ou ne sera pas nul, le nombre des chiffres placés entre la virgule et la première période, sera* Q *ou* Q+1. En effet; quel que soit x, on a,

$$\frac{M}{N} = \frac{Mp^{\alpha x} q^{\zeta x}}{Ap^{m} q^{n} p^{\alpha x} q^{\zeta x}} = \frac{Mp^{\alpha x - m} q^{\zeta x - n}}{Ap^{\alpha x} q^{\zeta x}} = \frac{Mp^{\alpha x - m} q^{\zeta x - n}}{Ab^{x}}.$$

Soit s la plus petite des valeurs entières positives de x, qui rendent, $\alpha x - m$ et $\zeta x - n$, positifs; l'un des nombres, $\alpha(s-1) - m$, $\zeta(s-1) - n$, sera nécessairement négatif, et $s-1$ ne sera pas négatif. Faisant $x = s$, il viendra,

$$\frac{M}{N} = \frac{Mp^{\alpha s - m} q^{\zeta s - n}}{Ab^{s}} = \frac{P}{Ab^{s}}, \quad P = Mp^{\alpha s - m} q^{\zeta s - n},$$

$$\frac{P}{b} = Mp^{\alpha(s-1) - m} q^{\zeta(s-1) - n}.$$

Mais, M et N sont premiers entr'eux; M et A n'ont donc pas de facteurs communs; *la fraction* $\frac{P}{A}$ *est donc irréductible*, car A ne contient aucun des facteurs, p, q.

Le premier chiffre à droite de P *n'est jamais zéro*, car si cela était, $\frac{P}{b}$ serait un nombre entier E; on aurait, $E = Mp^{\alpha(s-1) - m} q^{\zeta(s-1) - n}$.

Quand A renfermerait les facteurs, p, q, le nombre M ne serait divisible par aucun de ces facteurs; $\alpha(s-1) - m$ et $\zeta(s-1) - n$, seraient donc positifs; ce qui est contre l'hypothèse. Lorsque A ne renfermerait qu'un

des facteurs, p, q, le facteur p par exemple; on aurait,

$$n=0,\quad N=Ap^{m},\quad M=A'q^{s},\quad E=A'p^{\alpha(s-1)-m}q^{\beta(s-1)+s}.$$

s désignant un nombre entier positif, et A' ne contenant aucun des facteurs, p, q. Les exposans, $\alpha(s-1)-m$, $\beta(s-1)+s$, seraient donc positifs; $\alpha(s-1)-m$ et $\beta(s-1)+n$, seraient donc positifs. Ce qui est encore contre l'hypothèse. Le premier chiffre à droite de P n'est donc jamais zéro. Or, la fraction $\frac{P}{A}$ est irréductible et A ne contient aucun des facteurs premiers, p, q, de la base b. La division de P par Ab^{s}, donnera donc pour $\frac{B}{A}$, un quotient qui renfermera s chiffres entre la virgule et la première période (n° 269). Mais, la valeur de s est Q ou Q+1, (note du n° 265). Le principe énoncé est donc exact.

271. La division du numérateur d'une fraction, par son dénominateur, conduisant toujours à un quotient exact ou periodique, nous allons résoudre le problème inverse. Quand le quotient est exact, la règle du n° 261, détermine la fraction ordinaire équivalente. Nous allons démontrer que *tout quotient périodique, est égal à une fraction ordinaire*. Pour simplifier les calculs, nous désignerons, la *base* du système de numération par b, le quotient total par x, le nombre placé à gauche de la virgule par E, la partie non périodique, placée entre la virgule et la première période, par N, le nombre des chiffres de N, par n, la période par P et le nombre des chiffres de P, par p. Si le quotient périodique était..... 129, 34 587 587 etc., on aurait,

$$x=129,34\,587\,587\text{ etc.};\ E=129,\ N=34,\ n=2,\ P=587,\ p=3.$$

Et en général, on écrira la valeur de x, de cette manière,

$$(1)\ldots\ x=E,NPPP\text{ etc.}$$

Pour obtenir une valeur de x, qui ne renferme pas une infinité de chiffres, on observera que si l'on pouvait déduire de l'équation (1), deux expressions en x, qui continssent la même partie périodique, leur différence ne renfermerait plus la partie périodique. De sorte qu'on en déduirait une valeur de x, qui ne se prolongerait plus à l'infini. Le problème serait donc résolu. La manière la plus simple de parvenir à ces deux expressions, est de transporter successivement la virgule à droite et à gauche de la première période, ce qui donne ENP,PPP etc., EN,PPP etc. (*). Or, en avancant ainsi la virgule, de $n+p$ et de n rangs à droite, on multiplie le quotient

(*) Lorsque $x=129,34\,587\,587$ etc.; on a, d'après la notation adoptée, ENP,PP etc. $=129345\,87,587\,587$ etc.; EN,PP etc. $=129\,34,587\,587$ etc. ENP,PP etc. $-$ EN,PP etc. $=$ ENP $-$ EN $=129345\,87-129\,34$.

x, par b^{n+p} et par b^n (n° 260). On a donc,

$$x \times b^{n+p} = \text{ENP}_{,}\text{PPP etc.}, \quad \text{et} \quad x \times b^n = \text{EN}_{,}\text{PPP etc.}$$

Pour trouver x, on retranchera ces équations membre à membre, ce qui donnera,

$$xb^{n+p} - xb^n = \text{ENP} - \text{EN}\,; \quad \text{d'où} \quad (2)\ldots x = \frac{\text{ENP} - \text{EN}}{(b^p - 1)b^n}.$$

Or, $b^p - 1$ est un nombre composé de p chiffres égaux à $b - 1$, (n° 207), et l'on multiplie ce nombre par b^n, en plaçant n zéros sur sa droite. La comparaison des formules (1) et (2), conduit donc à cette règle générale :

272. *La base étant b; pour convertir un quotient périodique, en fraction ordinaire; transportez successivement la virgule, à droite et à gauche de la première période; la différence entre ces deux derniers nombres, sera le numérateur de la fraction demandée* (*). *Pour former son dénominateur, il suffit de prendre un nombre, composé d'autant de chiffres égaux à $b - 1$, qu'il y a de chiffres dans la période et de mettre autant de zéros sur la droite de ce nombre, qu'il y a de chiffres entre la virgule et la première période.* Cette règle, démontre généralement les propriétés des n°s 88 et 86.

273. *Remarque.* Quand le quotient périodique x, étant moindre que l'unité, la période commence au premier chiffre à droite de la virgule, la règle donne, $x = \frac{\text{P}}{b^p - 1}$. De sorte que, *tout quotient périodique, moindre que l'unité, dont la période commence au premier chiffre à droite de la virgule, est égal à une fraction ordinaire, qui a pour numérateur la période et pour dénominateur un nombre composé d'autant de chiffres égaux à $b - 1$, qu'il y a de chiffres dans la période.* Si l'on veut parvenir directement à ce résultat, on posera $x = 0_{,}\text{PPP etc.}$ Avançant la virgule de p rangs à droite, la valeur de x sera multipliée par b^p; de sorte que, $x \times b^p = \text{P}_{,}\text{PPP etc.}$; retranchant ces équations membre à membre, il viendra,

$$x \times b^p - x = \text{P}\,; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{\text{P}}{b^p - 1}. \quad \text{On en déduit,}$$

$$0_{,}27\,27\,27\ \text{etc.} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}, \quad (0_{,}27\,27\,27\ \text{etc.})_9 = \left(\frac{27}{88}\right)_9 = \left(\frac{5}{17}\right)_9 = \frac{5}{16}.$$

(*) On peut simplifier le calcul en supprimant successivement dans le quotient x, tous les chiffres placés à droite de la première période et ensuite toutes les périodes; ce qui donne $\text{E}_{,}\text{NP}$ et $\text{E}_{,}\text{N}$; on fait abstraction de la virgule dans ces deux derniers nombres; la différence entre les deux nombres entiers, ENP, EN, qui en résultent, exprime le numérateur demandé.

Fractions continues.

274. Quand les deux termes d'une fraction irréductible $\frac{B}{A}$, sont des nombres un peu grands, il est difficile de prendre une idée de la grandeur de cette fraction; on cherche alors des fractions *plus simples* (*), qui approchent le plus possible de cette fraction. Nous allons faire voir comment on peut calculer ces fractions.

Pour obtenir la *valeur entière approchée* de la fraction $\frac{B}{A}$, on divisera B par A; ce qui donnera un quotient entier q et un reste r; on aura, $\frac{B}{A} = q + \frac{r}{A}$; de sorte que la valeur de la fraction $\frac{B}{A}$, sera comprise entre les deux nombres entiers, q, $q+1$; chacun de ces nombres, est une valeur entière approchée de $\frac{B}{A}$ et q est ce qu'on nomme la *plus petite valeur entière approchée de la fraction* $\frac{B}{A}$. Pour trouver une valeur plus approchée, on divisera les deux termes de $\frac{r}{A}$, par r; nommant q' le quotient entier de la division de A par r, et r' le reste, il viendra,

$$\frac{r}{A} = \frac{1}{\left(\frac{A}{r}\right)} = \frac{1}{q' + \frac{r'}{r}}; \text{ d'où } \frac{B}{A} = q + \frac{1}{q' + \frac{r'}{r}}.$$

$q + \frac{1}{q'}$ sera une nouvelle valeur approchée de $\frac{B}{A}$; cette deuxième valeur approchée, sera trop grande, car en prenant q', au lieu de $q' + \frac{r'}{r}$, le dénominateur q' est trop petit. Opérant sur $\frac{r'}{r}$, comme on a opéré sur $\frac{r}{A}$, on divisera les deux termes r' et r, par r'; la division de r par r', donnera un quotient entier q'' et un reste r''; on aura,

$$\frac{r'}{r} = \frac{1}{\left(\frac{r}{r'}\right)} = \frac{1}{q'' + \frac{r''}{r'}}; \text{ d'où, } \frac{B}{A} = q + \cfrac{1}{q' + \cfrac{1}{q'' + \cfrac{r''}{r'}}}.$$

(*) On dit qu'une fraction est *plus simple* qu'une autre, lorsque les deux termes de la première, sont respectivement moindres que ceux de la seconde. Ainsi, $\frac{1}{2}$ est *plus simple* que $\frac{6}{12}$ et $\frac{2}{3}$ est plus simple que $\frac{4}{5}$.

Si l'on négligeait la fraction $\frac{r''}{r'}$, on aurait une troisième valeur approchée, ıi serait moindre que $\frac{B}{A}$, car q'' étant trop petit, le dénominateur $q' + \frac{1}{q''}$ rait trop grand. En continuant de la même manière, on voit que l'on ›tiendrait des fractions, qui seraient alternativement plus grandes et plus :tites que $\frac{B}{A}$. Or, ces calculs sont les mêmes que si l'on cherchait le plus ·and commun diviseur entre B et A; q, q', q'', etc., sont les *quotiens* ıccessifs et, r, r', r'', etc., sont les *restes* correspondans; mais B et A ›nt premiers entr'eux, leur plus grand commun diviseur est donc l'unité; ı parviendra donc toujours à un reste égal à l'unité. Soit $r''=1$; le quo- ent q''', de r' par r'', sera $q'''=r'$; de sorte que,

$$(1) \ldots \frac{B}{A} = q + \frac{1}{q'} + \frac{1}{q''} + \frac{1}{q'''}.$$

Cette valeur de $\frac{B}{A}$ est ce qu'on nomme une *fraction continue;*

$$\frac{q}{1},\ q + \frac{1}{q'},\ q + \frac{1}{q'} + \frac{1}{q''},\ \text{etc.},$$

›nt les *réduites* successives, et les *quotiens incomplets*, qui répondent ces réduites, sont q, q', q'', etc. Les fractions continues, jouissent d'un ·and nombre de propriétés, nous nous bornerons à faire connaître comment ı peut *déterminer la valeur d'une fraction continue, avec une ap- ›oximation donnée.* La solution de ce problème, repose sur des principes ıe nous allons d'abord établir.

275. Les calculs précédens (n° 274), conduisent à cette règle générale: *our convertir une fraction irréductible* $\frac{B}{A}$, *en fraction continue, ›érez comme si vous cherchiez le plus grand commun diviseur entre et* A; *vous obtiendrez des quotiens entiers successifs*, q, q', q'', *etc.; ' exprime le quotient entier de la division de* B *par* A); *le nombre ces quotiens sera toujours moindre que* A + 1. *La valeur de en fraction continue, sera donnée par la formule,*

$$(2) \ldots \frac{B}{A} = q + \frac{1}{q'} + \frac{1}{q''} + \text{etc.}$$

276. La *conversion des fractions continues, en fractions ordinaires,* offre aucune difficulté. En effet; on a,

$q + \frac{1}{q'} = \frac{qq'+1}{q'}$. Changeant q', en $q' + \frac{1}{q''}$, il vient

$$q + \frac{1}{q'} + \frac{1}{q''} = \frac{q(q' + \frac{1}{q''}) + 1}{q' + \frac{1}{q''}} = \frac{(qq'+1)q''+q}{q'q''+1}.$$

Changeant, dans cette dernière, q'', en $q'' + \frac{1}{q'''}$, et multipliant les deux termes du résultat par q''', on trouverait la valeur de la fraction continue (1), en fraction ordinaire.

277. Les calculs précédens, donnent le moyen d'*évaluer les réduites successives, en fractions ordinaires*, mais on peut abréger ces calculs. En effet; la comparaison des quotiens, q, q', q'', q''', etc., avec les réduites correspondantes,

$$\frac{q}{1}, \frac{qq'+1}{q'}, \frac{(qq'+1)q''+q}{q'q''+1}, \frac{(qq'q''+q''+q)q'''+(qq'+1)}{(q'q''+1)q'''+q'}, \text{etc.},$$

fait voir que la 3e réduite, se déduit des deux précédentes, en multipliant les deux termes de la 2e, par q'' et ajoutant aux produits les deux termes q et 1 de la 1re réduite. La 4e réduite, se déduit des deux précédentes d'après la même loi, c'est-à-dire que son numérateur et son dénominateur peuvent s'obtenir, en multipliant les deux termes de la 3e réduite, par q''' et ajoutant aux produits les deux termes de la 2e réduite. L'*analogie* conduit donc à cette règle:

278. *Pour transformer en fractions ordinaires, les réduites successives, qui correspondent à la fraction continue* (2); *écrivez les quotiens q', q'', q''', etc., par ordre et sur une même ligne horizontale; calculez les deux premières réduites, $\frac{q}{1}$, $\frac{qq'+1}{q'}$; posez ces réduites sous q' et q''. Pour en déduire la 3e réduite, multipliez les deux termes de la 2e réduite, par le quotient q'', placé au-dessus; les produits, augmentés respectivement des deux termes de la 1re réduite, donneront le numérateur et le dénominateur de la 3e réduite. Posez la 3e réduite, sous q'''. La 4e réduite se déduira de même des deux précédentes, en prenant pour multiplicateur le quotient q'''. Et ainsi de suite.* L'exactitude de cette loi étant vérifiée pour les trois premières réduites, il suffit de prouver que si la loi énoncée a lieu pour trois réduites successives, $\frac{\zeta}{\alpha}$, $\frac{\zeta'}{\alpha'}$, $\frac{\zeta''}{\alpha''}$, la réduite suivante $\frac{\zeta'''}{\alpha'''}$, se déduira des deux précédentes, d'après la même loi. Soient, γ' et γ'' les quotiens incomplets correspondans aux réduites, $\frac{\zeta''}{\alpha''}$, $\frac{\zeta'''}{\alpha'''}$; il s'agit de prouver que si l'on a, (2)..... $\frac{\zeta''}{\alpha''} = \frac{\zeta'\gamma'+\zeta}{\alpha'\gamma'+\alpha}$,

on peut en conclure, (3)..... $\frac{\mathcal{C}'''}{\alpha'''} = \frac{\mathcal{C}''\gamma'' + \mathcal{C}'}{\alpha''\gamma' + \alpha'}$ (*).

Or, d'après la définition des réduites successives, $\frac{\mathcal{C}'''}{\alpha'''}$ se déduit de $\frac{\mathcal{C}''}{\alpha''}$, en changeant dans cette dernière, γ' en $\gamma' + \frac{1}{\gamma''}$. La formule (2) donnera donc...

$$\frac{\mathcal{C}'''}{\alpha'''} = \frac{\mathcal{C}'\left(\gamma' + \frac{1}{\gamma''}\right) + \mathcal{C}}{\alpha'\left(\gamma' + \frac{1}{\gamma''}\right) + \alpha} = \frac{(\mathcal{C}'\gamma' + \mathcal{C})\gamma'' + \mathcal{C}'}{(\alpha'\gamma' + \alpha)\gamma'' + \alpha'} = \frac{\mathcal{C}''\gamma'' + \mathcal{C}'}{\alpha''\gamma'' + \alpha'}.$$

La formule (3) n'est donc qu'une conséquence de la formule (2). Ce qui démontre le principe énoncé. De sorte que, $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$, $\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}$, $\frac{\mathcal{C}''}{\alpha''}$, $\frac{\mathcal{C}'''}{\alpha'''}$, désignant des réduites consécutives d'un rang quelconque, on a

$$(4)\ldots\ \mathcal{C}'' = \mathcal{C}'\gamma' + \mathcal{C},\ \alpha'' = \alpha'\gamma' + \alpha,\ \mathcal{C}''' = \mathcal{C}''\gamma'' + \mathcal{C}',\ \alpha''' = \alpha''\gamma'' + \alpha'$$

279. Ces formules générales démontrent que *les termes des réduites successives sont d'autant plus grands, que ces réduites sont plus éloignées de la première*, car α, $\mathcal{C}$, α', $\mathcal{C}'$, γ' et γ'', étant des nombres entiers positifs, on a,

$$\mathcal{C}'' > \mathcal{C}',\ \alpha'' > \alpha',\ \mathcal{C}''' > \mathcal{C}'',\ \alpha''' > \alpha''.$$

280. *Les réduites successives sont alternativement plus petites et plus*

(*) D'après la notation adoptée, si l'on désigne la fraction continue totale par x, on aura,

$$x = q + \frac{1}{q'} + \frac{1}{q''} + \ldots + \frac{1}{\gamma'} + \frac{1}{\gamma''} + \text{etc.};\quad \frac{\mathcal{C}''}{\alpha''} = q + \frac{1}{q'} + \frac{1}{q''} + \ldots + \frac{1}{\gamma'};$$

$$\frac{\mathcal{C}'''}{\alpha'''} = q + \frac{1}{q'} + \frac{1}{q''} + \ldots + \frac{1}{\gamma'} + \frac{1}{\gamma''}.$$

Les points placés entre q'' et $\frac{1}{\gamma'}$, indiquent qu'il y a un nombre quelconque de quotiens, entre q'' et γ'. Si dans la valeur de $\frac{\mathcal{C}''}{\alpha''}$, on change γ' en $\gamma' + \frac{1}{\gamma''}$, le résultat sera $\frac{\mathcal{C}'''}{\alpha'''}$.

$\mathcal{C}''$ et α'' désignent les deux termes de la réduite pour laquelle on suppose la loi démontrée; de sorte que, par hypothèse, $\mathcal{C}'' = \mathcal{C}'\gamma' + \mathcal{C}$, $\alpha'' = \alpha'\gamma' + \alpha$.

$q + \frac{1}{q'} = \frac{qq'+1}{q'}$. Changeant q', en $q' + \frac{1}{q''}$, il vient

$$q + \frac{1}{q'} + \frac{1}{q''} = \frac{q(q' + \frac{1}{q''}) + 1}{q' + \frac{1}{q''}} = \frac{(qq'+1)q'' + q}{q'q''+1}.$$

Changeant, dans cette dernière, q'', en $q'' + \frac{1}{q'''}$, et multipliant les deux termes du résultat par q''', on trouverait la valeur de la fraction continue (1), en fraction ordinaire.

277. Les calculs précédens, donnent le moyen d'*évaluer les réduites successives, en fractions ordinaires*, mais on peut abréger ces calculs. En effet, la comparaison des quotiens, q, q', q'', q''', etc., avec les réduites correspondantes,

$$\frac{q}{1}, \frac{qq'+1}{q'}, \frac{(qq'+1)q''+q}{q'q''+1}, \frac{(qq'q''+q''+q)q'''+(qq'+1)}{(q'q''+1)q'''+q'}, \text{etc.},$$

fait voir que la 3e réduite, se déduit des deux précédentes, en multipliant les deux termes de la 2e, par q'' et ajoutant aux produits les deux termes q et 1 de la 1re réduite. La 4e réduite, se déduit des deux précédentes, d'après la même loi, c'est-à-dire que son numérateur et son dénominateur peuvent s'obtenir, en multipliant les deux termes de la 3e réduite, par q''' et ajoutant aux produits les deux termes de la 2e réduite. L'*analogie* conduit donc à cette règle:

278. *Pour transformer en fractions ordinaires, les réduites successives, qui correspondent à la fraction continue* (2); *écrivez les quotiens q', q'', q''', etc., par ordre et sur une même ligne horizontale; calculez les deux premières réduites, $\frac{q}{1}$, $\frac{qq'+1}{q'}$; posez ces réduites sous q' et q''. Pour en déduire la 3e réduite, multipliez les deux termes de la 2e réduite, par le quotient q'', placé au-dessus; les produits, augmentés respectivement des deux termes de la 1re réduite, donneront le numérateur et le dénominateur de la 3e réduite. Posez la 3e réduite, sous q'''. La 4e réduite se déduira de même des deux précédentes, en prenant pour multiplicateur le quotient q'''. Et ainsi de suite.* L'exactitude de cette loi étant vérifiée pour les trois premières réduites, il suffit de prouver que si la loi énoncée a lieu pour trois réduites successives, $\frac{c}{a}$, $\frac{c'}{a'}$, $\frac{c''}{a''}$, la réduite suivante $\frac{c'''}{a'''}$, se déduira des deux précédentes, d'après la même loi. Soient, γ' et γ'' les quotiens incomplets correspondans aux réduites, $\frac{c''}{a''}$, $\frac{c'''}{a'''}$; il s'agit de prouver que si l'on a, (2)..... $\frac{c''}{a''} = \frac{c'\gamma' + c}{a'\gamma' + a}$,

on peut en conclure, (3)..... $\frac{\mathcal{C}'''}{\alpha'''} = \frac{\mathcal{C}''\gamma'' + \mathcal{C}'}{\alpha''\gamma'' + \alpha'}$ (*).

Or, d'après la définition des réduites successives, $\frac{\mathcal{C}'''}{\alpha'''}$ se déduit de $\frac{\mathcal{C}''}{\alpha''}$, en changeant dans cette dernière, γ' en $\gamma' + \frac{1}{\gamma''}$. La formule (2) donnera donc...

$$\frac{\mathcal{C}'''}{\alpha'''} = \frac{\mathcal{C}'\left(\gamma' + \frac{1}{\gamma''}\right) + \mathcal{C}}{\alpha'\left(\gamma' + \frac{1}{\gamma''}\right) + \alpha} = \frac{(\mathcal{C}'\gamma' + \mathcal{C})\gamma'' + \mathcal{C}'}{(\alpha'\gamma' + \alpha)\gamma'' + \alpha'} = \frac{\mathcal{C}''\gamma'' + \mathcal{C}'}{\alpha''\gamma'' + \alpha'}.$$

La formule (3) n'est donc qu'une conséquence de la formule (2). Ce qui démontre le principe énoncé. De sorte que, $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$, $\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}$, $\frac{\mathcal{C}''}{\alpha''}$, $\frac{\mathcal{C}'''}{\alpha'''}$, désignant des réduites consécutives d'un rang quelconque, on a

$$(4)\ldots\ \mathcal{C}'' = \mathcal{C}'\gamma' + \mathcal{C},\ \alpha'' = \alpha'\gamma' + \alpha,\ \mathcal{C}''' = \mathcal{C}''\gamma'' + \mathcal{C}',\ \alpha''' = \alpha''\gamma'' + \alpha'$$

279. Ces formules générales démontrent que *les termes des réduites successives sont d'autant plus grands, que ces réduites sont plus éloignées de la première*, car α, $\mathcal{C}$, α', $\mathcal{C}'$, γ' et γ'', étant des nombres entiers positifs, on a,

$$\mathcal{C}'' > \mathcal{C}',\ \alpha'' > \alpha',\ \mathcal{C}''' > \mathcal{C}'',\ \alpha''' > \alpha''.$$

280. *Les réduites successives sont alternativement plus petites et plus*

(*) D'après la notation adoptée, si l'on désigne la fraction continue totale par x, on aura,

$$x = q + \frac{1}{q'} + \frac{1}{q''} + \ldots + \frac{1}{\gamma'} + \frac{1}{\gamma''} + \text{etc.};\qquad \frac{\mathcal{C}''}{\alpha''} = q + \frac{1}{q'} + \frac{1}{q''} + \ldots + \frac{1}{\gamma'};$$

$$\frac{\mathcal{C}'''}{\alpha'''} = q + \frac{1}{q'} + \frac{1}{q''} + \ldots + \frac{1}{\gamma'} + \frac{1}{\gamma''}.$$

Les points placés entre q'' et $\frac{1}{\gamma'}$, indiquent qu'il y a un nombre quelconque de quotiens, entre q'' et γ'. Si dans la valeur de $\frac{\mathcal{C}''}{\alpha''}$, on change γ' en $\gamma' + \frac{1}{\gamma''}$, le résultat sera $\frac{\mathcal{C}'''}{\alpha'''}$.

$\mathcal{C}''$ et α'' désignent les deux termes de la réduite pour laquelle on suppose la loi demontrée; de sorte que, par hypothèse, $\mathcal{C}'' = \mathcal{C}'\gamma' + \mathcal{C}$, $\alpha'' = \alpha'\gamma' +$

grandes que la fraction continue totale (*); *mais elles s'en approchent de plus en plus.* Ces propriétés se déduisent de la relation qui existe entre deux réduites consécutives, $\frac{c}{a}$, $\frac{c'}{a'}$, et la fraction continue totale x. En effet; d'après la notation adoptée (note du n° 278), pour déduire la fraction continue totale x, de la réduite $\frac{c'}{a'}$, il suffit dans la valeur $\frac{c'\gamma'+c}{a'\gamma'+a}$, de cette réduite, de remplacer le quotient incomplet γ', par le quotient complet $\gamma'+\frac{1}{\gamma''+\text{etc}}$. Nommant donc y, ce quotient complet, on aura...

$$(1)\ldots x=\frac{c'y+c}{a'y+a} \quad \text{et} \quad y>1, \text{ car } \gamma', \gamma'', \text{etc, sont positifs.}$$

Cette équation exprime la relation qui existe entre la fraction continue totale x, et les termes de deux réduites consécutives quelconques, $\frac{c}{a}$, $\frac{c'}{a'}$. Pour comparer les grandeurs de ces fractions, il faut tâcher de mettre en évidence, les différences entre x et chacune des réduites, $\frac{c}{a}$, $\frac{c'}{a'}$. Or, l'équation (1) donne,

$$a'yx+ax=c'y+c;\ y(a'x-c')=c-ax;\ (2)\ldots a'y\left(x-\frac{c'}{a'}\right)=a\left(\frac{c}{a}-x\right).$$

Mais, $a'y$ et a sont positifs; les différences, $x-\frac{c'}{a'}$, $\frac{c}{a}-x$, sont donc toujours de mêmes signes; la valeur de x est donc comprise entre $\frac{c}{a}$ et $\frac{c'}{a'}$. Par exemple, si $\frac{c}{a}$ est plus grand que x, la réduite suivante $\frac{c'}{a'}$ sera moindre que x. Or, on a

$$a'>a,\ y>1;\quad \text{donc, } a'y>a.$$

La formule (2) démontre donc que, $x-\frac{c'}{a'}$ est moindre que $\frac{c}{a}-x$. La réduite $\frac{c'}{a'}$ approche donc plus de x, que la réduite précédente $\frac{c}{a}$. Ce qui démontre les propriétés énoncées.

281. *Remarque.* La 1re réduite $\frac{q}{1}$ est évidemment moindre que la fraction continue totale x. Par conséquent; *les réduites de rang impair sont trop petites et les réduites de rang pair sont trop grandes.* Mais, ces réduites, approchent de plus en plus de x; *les réduites de rang impair vont donc en augmentant, tandis que celles de rang pair diminuent.*

(*) Cette propriété avait été démontrée, par analogie, dans le n° 274.

De sorte que ces réduites forment deux séries, dont les termes se rapprochent de plus en plus de la valeur de la fraction continue totale.

282. La différence $\frac{1}{q'}$, entre les deux premières réduites, q, $q+\frac{1}{q'}$, a pour numérateur l'unité. Nous allons démontrer que cette propriété convient à deux réduites consécutives d'un rang quelconque. Si $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$ est de rang pair, on aura,

$$\frac{\mathcal{C}}{\alpha}>x,\ \frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}<x,\ \frac{\mathcal{C}''}{\alpha''}>x;\quad \text{donc},\ \frac{\mathcal{C}}{\alpha}>\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}\ \text{et}\ \frac{\mathcal{C}''}{\alpha''}>\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}.$$

La formule (2), du n° 278, donnera

$$\frac{\mathcal{C}''}{\alpha''}-\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}=\frac{\mathcal{C}'\gamma'+\mathcal{C}}{\alpha'\gamma'+\alpha}-\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}=\frac{\alpha'\mathcal{C}-\alpha\mathcal{C}'}{(\alpha'\gamma'+\alpha)\alpha'};\quad \text{or},\ \frac{\mathcal{C}}{\alpha}-\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}=\frac{\alpha'\mathcal{C}-\alpha\mathcal{C}'}{\alpha\alpha'}.$$

Les fractions, qui expriment les différences entre les réduites consécutives, ont donc des numérateurs égaux. Mais, le numérateur de la première différence est l'unité; *les numérateurs des fractions, qui expriment les différences entre les réduites consécutives, sont donc égaux à l'unité.*

* 283. *Remarque.* L'égalité, $\alpha'\mathcal{C}-\alpha\mathcal{C}'=1$, démontre que, *les deux termes de chaque réduite, sont premiers entr'eux*, car, d'après cette égalité, tout nombre qui divise exactement α et $\mathcal{C}$, devant diviser l'unité, α et $\mathcal{C}$ n'ont pas d'autre facteur commun que l'unité. Les réduites, formées d'après la règle du n° 278, ne peuvent donc pas être exprimées par des fractions plus simples.

284. La fraction continue totale x, étant toujours comprise entre deux réduites consécutives quelconques, $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$, $\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}$, l'erreur E que l'on commet, en prenant une de ces réduites, pour la valeur de x, est moindre que la différence entre $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$ et $\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}$. Or,

$$\frac{\mathcal{C}}{\alpha}-\frac{\mathcal{C}'}{\alpha'}=\frac{\alpha'\mathcal{C}-\alpha\mathcal{C}'}{\alpha\alpha'}=\frac{1}{\alpha\alpha'},\quad \text{car}\ \alpha'\mathcal{C}-\alpha\mathcal{C}'=1.$$

L'erreur E est donc moindre que $\frac{1}{\alpha\alpha'}$. Mais, α' étant moindre que α, $\frac{1}{\alpha^2}$ est plus grand que $\frac{1}{\alpha\alpha'}$; l'erreur E, est donc moindre que $\frac{1}{\alpha^2}$. Par conséquent; *lorsqu'on prend une réduite $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$, au lieu de la fraction continue totale, l'erreur que l'on commet est moindre que $\frac{1}{\alpha^2}$* (*).

(*) On peut aussi déduire cette propriété de l'équation (1) du n° 280. En effet; l'erreur E que l'on commet, en prenant $\frac{\beta}{\alpha}$, au lieu de x, est $\frac{\mathcal{C}}{\alpha}-x$.

285. *Lorsqu'on transforme une fraction irréductible* $\frac{B}{A}$, *en fraction continue* (n° 275), *le nombre des quotiens qui entrent dans la fraction continue, ne peut jamais surpasser* A; *il y a autant de réduites que de quotiens; elles approchent de plus en plus de la fraction* $\frac{B}{A}$, *mais leurs termes vont en augmentant; la dernière réduite est la fraction donnée* $\frac{B}{A}$; *toutes les autres réduites sont donc plus simples que* $\frac{B}{A}$. Ces réduites donnent le moyen d'*exprimer une fraction irréductible* $\frac{B}{A}$, *par des fractions plus simples et qui approchent de plus en plus de la valeur de* $\frac{B}{A}$. Dans ce cas, l'erreur que l'on commet, en prenant une réduite $\frac{C}{\alpha}$, au lieu de $\frac{B}{A}$, a pour valeur exacte la différence entre $\frac{C}{\alpha}$ et $\frac{B}{A}$; cette erreur est moindre que $\frac{1}{\alpha^2}$. Par exemple, soit la fraction..... $\frac{314\ 159}{100\ 000}$, qui exprime la *valeur du rapport de la circonférence au diamètre*, à moins d'un cent-millième d'unité près; la recherche du plus grand commun diviseur, entre 314 159 et 100 000, donnera les *quotiens* successifs, 3, 7, 15, 1, 25, 1, 7, 4, et la règle du n° 278, conduira aux calculs suivans:

Quotiens,	7,	15,	1,	25,	1,	7,	4,	
Réduites,	$\frac{3}{1}$,	$\frac{22}{7}$,	$\frac{333}{106}$,	$\frac{355}{113}$,	$\frac{9208}{2931}$,	$\frac{9563}{3044}$,	$\frac{76149}{24239}$,	$\frac{314\ 159}{100\ 000}$.

La première réduite est $\frac{3}{1}$; la deuxième est, $3+\frac{1}{7}$ ou $\frac{22}{7}$; pour en déduire les autres réduites, on a écrit les deux premières, sous les quotiens 7 et 15. On a multiplié les deux termes, 22, 7, de la seconde réduite, par le quotient 15, placé au-dessus; les produits 330, 105, augmentés des deux termes, 3, 1, de la première réduite, ont donné les termes 333, 106, de la troisième réduite. Et ainsi de suite. Les rapports approchés de

---

Or, l'équation indiquée donne,

$$E=\frac{C}{\alpha}-x=\frac{C}{\alpha}-\left(\frac{C'\gamma+C}{\alpha'\gamma+\alpha}\right)=\frac{\gamma}{\alpha(\alpha'\gamma+\alpha)},\quad \text{car } \alpha'C-\alpha C'=1.$$

On a donc, $E<\frac{\gamma}{\alpha\alpha'\gamma}$, ou $E<\frac{1}{\alpha\alpha'}$.

Donc, $E<\frac{1}{\alpha^2}$, car α' étant plus grand que α, on a $\frac{1}{\alpha^2}>\frac{1}{\alpha\alpha'}$.

la circonférence au diamètre, dont on fait le plus d'usage, sont $\frac{22}{7}$ et $\frac{355}{113}$; Ces rapports ont été donnés par *Archimède* et par *Adrien Métius*.

286. Réciproquement, *toute fraction continue, composée d'un nombre fini de quotiens, est équivalente à une fraction ordinaire* (n° 276).

287. *Il existe des quantités incommensurables, dont les valeurs sont exprimées par des fractions continues; ces fractions continues se prolongent nécessairement à l'infini, et dans ce cas, on ne parvient jamais à la valeur exacte de la fraction continue totale x, mais il est toujours possible de trouver une réduite $\frac{c}{\alpha}$, qui diffère de x, d'une quantité moindre qu'une quantité donnée $\frac{b}{a}$.* En effet; l'erreur commise en prenant $\frac{c}{\alpha}$, au lieu de x, étant moindre que $\frac{1}{\alpha^2}$, il suffit de satisfaire à la condition $\frac{1}{\alpha^2} < \frac{b}{a}$; cette inégalité donne, $\alpha > \sqrt{\frac{a}{b}}$, et les dénominateurs des réduites, croissant très-rapidement, la règle du n° 278, conduira toujours à une réduite $\frac{c}{\alpha}$, dont le dénominateur α jouira de la propriété demandée. *Si γ désigne la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt{\frac{a}{b}}$, on continuera les calculs du* n° 278, *jusqu'à ce qu'on trouve une réduite $\frac{c}{\alpha}$, dont le dénominateur α, soit plus grand que γ.* Pour appliquer cette théorie générale à des exemples, nous considérerons les fractions continues,

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{19 + \text{etc.}}}}} \qquad y = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \text{etc.}}}}}}}$$

Les plus petites valeurs entières approchées de x et y, étant zéro, le premier quotient est 0; la première réduite est donc $\frac{0}{1}$. Si l'on forme les valeurs approchées de x, on trouvera,

Quotiens,	2,	2,	1,	19,	etc.	
Réduites,	$\frac{0}{1}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{2}{5}$,	$\frac{3}{7}$,	$\frac{59}{138}$,	etc.

En prenant pour x, la valeur approchée $\frac{59}{138}$, on aura,

$x = \frac{59}{138} = 0{,}4275$ etc.; l'erreur sera moindre que $\frac{1}{(138)^2}$ ou que....

QUATRIÈME PARTIE.

position et usages des Tables de logarithmes, placées à la fin de ce volume (*).

Ces *Tables* contiennent les *logarithmes* des nombres entiers, depuis
asqu'à dix mille. Les colonnes intitulées N, contiennent les nombres; les
rithmes de ces nombres sont placés sur leur droite, dans la colonne intitu-
Log. La caractéristique *du logarithme d'un nombre entier, conte-*
autant d'unités moins une, qu'il y a de chiffres dans ce nombre
122), on n'a pas mis les *caractéristiques*. De sorte que les colonnes inti-
s *log.*, contiennent les parties décimales des logarithmes. Ainsi, on voit
la première page des Tables de logarithmes, que la partie décimale du lo-
hme de 186, est 26951; mais la caractéristique de ce log. est 2; le log. de
est donc 2,26951. Les logarithmes ne contiennent que cinq décimales,
e que cette approximation suffit pour les usages ordinaires. Les colonnes
portent en titre la lettre D, initiale du mot *différence*, contiennent les diffé-
es entre les logarithmes; et pour plus de clarté, la différence entre deux log.
écutifs, se trouve sur la droite de l'espace qui les sépare. On n'a conservé
les chiffres significatifs de cette différence; de sorte que le premier chiffre
oite de chaque différence, exprime des unités décimales du 5e ordre, c'est-
e des cent-millièmes d'unité. Ainsi, par exemple, les log. des nombres
, 3514, étant 3,54568 et 3,54580; leur différence, 12 cent-millièmes,
ouve dans la colonne D, sur la droite de l'espace qui les sépare. De même,
ombre 13, placé dans la colonne D, entre les log. de 3548 et de 3549,
que que la différence entre les log. de ces deux nombres est 0,000013; on
le vérifier en effectuant la soustraction (**).

1. Pour être en état d'opérer avec les log., il suffit de savoir résoudre ces
problèmes, dans tous les cas qu'ils comportent: *Un nombre étant donné,*
ver son log.; et réciproquement, un log. étant donné, trouver à quel
bre il appartient.

2. Ier Problème. *Un nombre étant donné, trouver son log.* Il se pré-
e différens cas que nous allons successivement examiner.

r Cas. *Pour obtenir le log. d'un nombre entier, moindre que* 10000;

) La quatrième partie de ces Notes est destinée à compléter la Théorie des
rithmes de Bezout, en faisant connaître quelles sont les méthodes les plus
bles et les plus exactes, pour opérer avec les Tables de logarithmes. Les
héros, placés entre parenthèses, indiqueront toujours des renvois à des
les de l'Arithmétique de Bezout. Pour abréger, nous écrirons le mot
rithme, de cette manière abrégée, *log.*, et dans les calculs, nous
mettrons souvent que la lettre initiale *l*; ainsi, *logarithme* 5, *log.* 5, *l.* 5,
ment également le logarithme du nombre 5.

**) On n'a pas mis les différences entre les log. des mille premiers nombres,
e qu'elles ne sont d'aucune utilité. Nous ne ferons usage que des différences
e les log. des nombres de quatre chiffres.

cherchez ce nombre dans les colonnes intitulées N. *Son log. sera sur sa droite, dans la colonne qui a pour titre* Log. On trouvera de cette manière, que le log. de 3679 est 3,56573.

IIe Cas. *Pour trouver le log. d'un nombre entier, plus grand que* 10000; *séparez, par la virgule décimale, les quatre premiers chiffres à gauche du nombre proposé. Le nombre décimal qui en résultera, tombera entre deux nombres entiers consécutifs, moindres que* 10000; *cherchez dans la colonne intitulée* D, *la différence entre les log. de ces deux nombres entiers. Multipliez cette différence, par la partie décimale de votre nombre décimal, en vous arrêtant aux unités; ces unités seront du* 5e *ordre décimal, c'est-à-dire des cent-millièmes; vous les ajouterez à la partie décimale du log. des quatre premiers chiffres à gauche du nombre proposé; la somme exprimera la partie décimale du log. cherché; et la caractéristique de ce log. contiendra autant d'unités moins une, qu'il y a de chiffres dans le nombre proposé.* Ainsi, pour trouver le log. du nombre 21598; je sépare, par la virgule, les quatre premiers chiffres à gauche, ce qui me donne 2159,8. Ce nombre décimal, tombant entre 2159 et 2160, je cherche dans la colonne D, la différence 20, entre les log. de ces deux nombres; je multiplie cette différence par la partie décimale 0,8 de mon nombre décimal 2159,8; le produit 16, exprimant des unités du 5e ordre, vaut 0,00016; j'ajoute ce dernier nombre à la partie décimale 0,33425 du log. des quatre premiers chiffres à gauche du nombre proposé 21598; la somme 0,33441 exprime la partie décimale du log. cherché; la caractéristique de ce log., qui doit contenir autant d'unités moins une, qu'il y a de chiffres dans le nombre donné 21598, est 4. Le log. de 21598 est donc enfin 4,33441. Voici la raison de ce procédé; le nombre 21598 étant égal à 10 fois 2159,8; le log. de 21598 est égal au log. de 10, plus le log. de 2159,8; mais le log. de 10 est 1; le log. de 21598 s'obtiendra donc en ajoutant 1, au log. de 2159,8. La question est ainsi réduite à trouver le log. de 2159,8. Le log. de 2159 étant 3,33425, il suffit de calculer ce qu'on doit ajouter à ce log. pour obtenir celui du nombre 2159,8, plus grand de 0,8; cela n'offre aucune difficulté, car la différence entre les log. de 2159 et de 2160, étant 0,00020, on peut dire : Si pour 1 de plus au nombre 2159, il faut ajouter 0,00020 à son log.; combien, pour 0,8 de plus, doit-on ajouter à ce même log.? Les trois premiers termes de la proportion sont donc

$$1 : 0{,}00020 :: 0{,}8 :$$

Ajoutant le 4e terme 0,00016, au log. de 2159, la somme 3,33441 sera le log. de 2159,8; le log. de 21598, étant plus grand d'une unité, sera 4,33441.

IIIe Cas. *Pour obtenir le log. d'un nombre fractionnaire, plus grand que l'unité; il suffit de retrancher le log. du dénominateur, de celui du numérateur; le reste exprime le log. demandé,* (n° 231). Ainsi, le log. du nombre fractionnaire $\frac{3549}{25}$, est égal à la différence 2,15217, entre les log. des nombres 3549 et 25. Si l'on demandait le log. de $7\frac{3}{11}$; on substituerait à ce nombre, l'expression équivalente $\frac{80}{11}$; retranchant alors le log. de 11, de celui de 80, le reste 0,86170, serait le log. cherché.

IVe Cas. *Le log. d'une fraction ordinaire, moindre que l'unité, est susceptible de deux formes différentes; 1°. Si vous desirez que le log. soit entièrement négatif; retranchez le log. du numérateur, de celui du dénominateur; le reste, affecté du signe —, sera le log. cherché. 2°. Si vous demandez que la caractéristique seule soit négative; ajoutez assez d'unités au log. du numérateur, pour que vous puissiez en soustraire le log. du dénominateur; effectuez cette soustraction; la partie décimale du reste, affectée d'une caractéristique négative égale à la différence entre ces unités du reste et les unités ajoutées pour rendre la soustraction possible, donnera le log. demandé. On exprime que la caractéristique seule est négative, en plaçant au-dessus le signe —.* Pour appliquer cette règle à un exemple, proposons-nous de trouver le log. de la fraction $\frac{25}{3549}$.

1°. Si l'on veut que le log. soit entièrement négatif, il suffit de retrancher le log. de 25, de celui de 3549; le reste 2,15217, affecté du signe —, donnera —2,15217, pour le log. demandé. En effet; la fraction $\frac{25}{3549}$, peut être considérée comme exprimant le quotient de la division de 1, par $\frac{3549}{25}$; mais *le log. du quotient est égal au log. du dividende, moins le log. du diviseur;* le log. de la fraction $\frac{25}{3549}$, est donc égal au log. de 1, moins le log. de $\frac{3549}{25}$; or, le log. de 1 est zéro, et le log. de $\frac{3549}{25}$ est 2,15217; le log. de $\frac{25}{3549}$ est donc effectivement égal à, 0 — 2,15217, ou à — 2,15217.

2°. Si l'on veut que la caractéristique du log. de $\frac{25}{3549}$, soit seule négative; on ajoutera d'abord assez d'unités au log. du numérateur, pour qu'on puisse en soustraire le log. du dénominateur; si l'on ajoute, par exemple, 7 unités au log. de 25, on aura 8,39794; retranchant de ce dernier nombre, le log. du dénominateur 3549, qui est 3,55011, le reste sera 4,84783; la partie décimale 0,84783 de ce reste, affectée d'une caractéristique 3, égale à la différence 3, qui existe entre les 4 unités du reste et les 7 unités ajoutées pour rendre la soustraction possible, donne le log. cherché $\bar{3}$,84783; la caractéristique de ce log. étant seule négative, on met au-dessus le signe —; ce qui donne $\bar{3}$,84783. La raison de ce procédé est facile à apercevoir, car le log. d'une fraction étant égal au log. du numérateur, moins le log. du dénominateur; quand, pour rendre la soustraction possible, on ajoute plusieurs unités au log. du numérateur, le reste est trop grand des unités ajoutées; on doit donc diminuer la caractéristique du reste, des unités ajoutées. Ainsi, quand, pour obtenir le log. de $\frac{25}{3549}$, on retranche le log. de 3549, du log. de 25 augmenté de 7; le reste 4,84783 est trop fort des 7 unités ajoutées; on doit donc en ôter 7; effectuant la soustraction sur la caractéristique, pour que la partie décimale 0,84783 demeure positive, on ôtera 7 de 4, ce qui donnera le reste — 3 (*); le log. demandé est donc $\bar{3}$,84783. On parviendrait au

(*) Pour soustraire 7 de 4, on ôtera d'abord 4 de 4, ce qui donnera 0; comme il reste 3 unités à soustraire de 0, on l'indique en écrivant — 3.

même résultat, en ajoutant un autre nombre d'unités, au log. du numérateur. En appliquant la règle aux fractions,

$$\frac{17}{35748} \text{ et } \frac{1}{2134};$$

on trouvera que leurs log. sont,

$$-3{,}32280 \text{ ou } \overline{4}{,}67720 \quad \text{et} \quad -3{,}32919 \text{ ou } \overline{4}{,}67081.$$

Le log. d'un nombre décimal, plus grand ou plus petit que l'unité, pourrait s'obtenir en cherchant le log. de la fraction ordinaire, équivalente au nombre décimal proposé. Mais, il est plus commode d'opérer directement sur le nombre décimal, au moyen des deux règles suivantes :

Ve Cas. *Pour obtenir le log. d'un nombre décimal plus grand que l'unité; cherchez le log. du nombre entier, qui résulte de la suppression de la virgule dans le nombre proposé; diminuez la caractéristique du log. d'autant d'unités que le nombre proposé contient de chiffres décimaux. Le résultat sera le log. demandé. Sa caractéristique contiendra autant d'unités moins une, qu'il y a de chiffres à gauche de la virgule, dans le nombre décimal proposé.* Ainsi, pour trouver le log. de 21,598, je fais d'abord abstraction de la virgule, et je cherche le log. de 21598, qui est 4,33441; je diminue la caractéristique 4, de 3 unités, à cause des 3 décimales du nombre proposé; le résultat 1,33441 exprime le log. cherché. Pour apercevoir la raison de ce procédé, on observera que 21,598, valant $\frac{21598}{1000}$; le log. de 21,598 est le même que celui de $\frac{21598}{1000}$; mais le log. d'une fraction s'obtient en retranchant le log. du dénominateur, de celui du numérateur, et le log. de 1000 est 3. Le log. demandé s'obtiendra donc en retranchant 3, du log. de 21598. Cela démontre que le log. de 21,598 est effectivement égal au log. de 21598, diminué du nombre 3 des décimales, comme le prescrit la règle. Le même raisonnement s'appliquerait à tout autre exemple. Si l'on demandait le log. de 21; on chercherait celui de 21, qui est 1,32222; diminuant la caractéristique 1, de 1, on aurait 0,32222 pour le log. demandé.

VIe Cas. *Le log. négatif, d'un nombre décimal moindre que l'unité, est susceptible de deux formes différentes. 1°. Si vous demandez que le résultat soit entièrement négatif; cherchez le log. du nombre entier qui résulte de la suppression de la virgule dans le nombre décimal proposé; retranchez ce log. du nombre des chiffres décimaux qui se trouvent dans le nombre proposé; le reste, précédé du signe —, sera le log. demandé. La caractéristique de ce log. sera toujours égale au nombre des zéros compris entre la virgule et le premier chiffre décimal significatif du nombre proposé. 2°. Si vous desirez que la caractéristique seule soit négative, cherchez le log. du nombre entier qui résulte de la suppression de la virgule dans le nombre décimal proposé. La partie décimale de ce log., affectée d'une caractéristique égale au nombre des zéros qui précèdent le premier chiffre décimal significatif du nombre proposé, exprime le log. cherché. On met le signe — au-dessus de la caractéristique, pour indiquer qu'elle est seule négative.* Appliquons cette règle à la recherche du log. de 0,000456.

1°. Si l'on veut que le log. soit entièrement négatif, on cherchera le log. de 456, qui est 2,65896; le nombre proposé contenant 6 décimales, on retranchera de 6, le log. 2,65896; le reste, affecté du signe —, donnera —3,34104 pour le log. demandé. En voici la preuve...

$$l.(0{,}000456)=l.\left(\frac{456}{1000000}\right)=l.456-l.1000000=2{,}658896-6=-3{,}34104.$$

2°. Si l'on veut que la caractéristique seule soit négative, on cherchera le log. du nombre entier 456, qui résulte de la suppression de la virgule dans le nombre proposé 0,000456; le log. de 456 est 2,658896; la partie décimale de ce log., affectée d'une caractéristique négative égale au nombre 4, des zéros qui précèdent le premier chiffre décimal significatif du nombre proposé 0,000456, donne $\bar{4}$,658896 pour le log. demandé. Ce procédé trouve sa démonstration dans les égalités suivantes...

$$l.0{,}000456=l.\frac{456}{1000000}=l.456-l.1000\,000=2{,}658896-6$$
$$=2-6+0{,}658896=-4+0{,}658896=\bar{4}{,}658896.$$

293. IIe Problème. *Un log. étant donné, trouver le nombre auquel il appartient.*

Ier Cas. *Si le log. est dans la table (la caractéristique est alors*, 0, 1, 2 *ou* 3), *on le trouve dans l'une des colonnes intitulées* Log., *et le nombre entier, moindre que* 10000, *auquel il appartient, est sur sa gauche, dans la colonne intitulée* N. On trouve, de cette manière, que le log. 3,56573, appartient au nombre 3679.

IIe Cas. *Si la caractéristique du log. proposé étant* 3, *la partie décimale ne se trouve pas dans la table; prenez, dans la colonne* D, *la différence entre les deux log. qui comprennent le log. donné; calculez la différence entre votre log. et celui de la table qui est immédiatement plus petit; considérant ces différences comme des unités simples, divisez la seconde par la première; calculez deux décimales au quotient; le nombre de quatre chiffres, auquel appartient le plus petit des deux log. tabulaires, suivi des deux décimales, fournies par la division, donnera, à moins d'un centième d'unité près, la valeur du nombre décimal auquel appartient le log. proposé. Dans quelques cas, assez rares, les deux décimales sont fausses; mais on peut toujours compter sur l'exactitude des quatre premiers chiffres à gauche du résultat.*

Exemple. Pour trouver à quel nombre appartient le log 3,33441, on cherchera dans la colonne des log., les deux log. tabulaires entre lesquels tombe le log. proposé; on trouvera que ces deux log. sont 3,33425 et 3,33445; on prendra dans la colonne D, la différence 20 cent-millièmes, entre ces deux log.; on calculera ensuite la différence 16 cent-millièmes, entre le log. donné 3,33441 et le log. tabulaire immédiatement plus petit 3,33425; divisant la seconde différence, par la première, le quotient sera 0,80; le nombre 2159, auquel appartient le plus petit log. tabulaire 3,33425, suivi des deux décimales 0,80, fournies par la division, donnera 2159,80, pour le nombre décimal auquel appartient le log. proposé 3,33441. Voici la raison de ce procédé; le log. donné 3,33441, tombant entre les log. de 2159 et de 2160, qui sont 3,33425 et

3,33445 ; le nombre cherché tombe entre 2159 et 2160 ; ce nombre est
2159, plus une fraction ; pour trouver cette fraction, je prends la différe
0,00020, entre les log. de 2159 et de 2160 ; je cherche la différence
entre le log. donné et le log. tabulaire immédiatement plus petit, et je
Si pour 0,00020 de différence, entre les log. de 2159 et de 2160, il faut ajou
1 à 2159 ; combien, pour 0,00016 de différence, entre mon log. et celui
2159, doit-on ajouter à 2159 ? Les trois premiers termes sont donc

0,00020 : 1 :: 0,00016 :

Le quatrième terme de cette proportion est $\frac{16}{20}$ ou 0,80 ; le nombre cherché
donc 2159,80. On voit que le raisonnement conduit au même calcul
la règle abrégée.

IIIe Cas. *Si la caractéristique du log. proposé est plus grande qu*
diminuez-la d'assez d'unités pour qu'elle devienne 3. *Cherchez, dan*
table, à quel nombre appartient ce nouveau log. Si ce nombre est en
mettez autant de zéros sur sa droite que vous avez retranché d'unité
la caractéristique ; et s'il est décimal, avancez la virgule d'autan
rangs vers sa droite, que vous avez retranché d'unités de la car
ristique. Dans ces deux cas, le résultat sera le nombre auquel appar
le log. proposé. Cette règle est fondée sur cette propriété, que le no
auquel correspond un log., est divisé autant de fois par 10, qu'on retr
d'unités de la caractéristique (n° 238).

Ier Exemple. Soit le log. 7,56573 ; je diminue la caractéristique 7,
unités, ce qui donne 3,56573 ; cherchant ce dernier log. dans la tabl
trouve qu'il appartient au nombre entier 3679 ; mettant 4 zéros sur la
de ce nombre, à cause des 4 unités ôtées de la caractéristique 7, le re
36 790 000, exprime le nombre auquel appartient le log 7,56573. La raison
procédé est facile à apercevoir. En effet ; quand on ôte 4 unités, de la ca
ristique 7, le log. 3,56573 que l'on obtient, appartient à un nombre 367
est 10000 fois trop petit ; le nombre cherché s'obtiendra donc en multi
3679, par 10000 ; ce qui revient à mettre 4 zéros sur la droite de 3679.

IIe Exemple. Pour trouver à quel nombre appartient le log. 5,33441
diminuera la caractéristique 5, de 2 unités, ce qui donnera 3,33441 ; cher
à quel nombre appartient ce dernier log. (n° 293, 2e cas), on trouvera 215
avançant la virgule de deux places vers la droite, à cause des deux unités ôt
la caractéristique, le résultat 215980, exprimera le nombre auquel appa
le log. donné 5,33441. Cela est évident, car le log. 3,33441, appartena
nombre 2159,80 ; le log. donné 5,33441, qui contient 2 unités de plus
partient au nombre 100 fois plus grand 215980.

IIIe Exemple. Si le log. proposé était 4,79772 ; on diminuerait sa c
téristique d'une unité, ce qui donnerait 3,79772 ; cherchant à quel no
appartient ce dernier log. (n° 293, 2e cas), on trouverait 6276,57 ; avance
virgule d'un rang vers la droite, à cause de l'unité retranchée de la car
ristique, le résultat 62765,7 serait le nombre auquel appartient le log. pro

IVe Cas. *Si le log. proposé ne se trouvant pas dans la table, la*
racteristique est moindre que 3 ; *ajoutez assez d'unités à la car*
ristique, pour qu'elle devienne 3 ; cherchez dans la table à quel no

décimal appartient ce nouveau log., et avancez la virgule d'autant de rangs vers la gauche du nombre décimal, que vous avez ajouté d'unités à la caractéristique. Le résultat sera le nombre auquel appartient le log. proposé. Cette règle se démontre comme la précédente. Pour trouver à quel nombre appartient le log. 1,79772 ; on ajoutera deux unités à la caractéristique 1, ce qui donnera 3,79772 ; cherchant à quel nombre appartient ce dernier log. (n° 293, 2e cas), on trouvera 6276,57; avançant la virgule de deux rangs vers la gauche, à cause des deux unités ajoutées à la caractéristique, le résultat 62,7657 exprimera le nombre auquel appartient le log. 1,79772. Cela est évident, car en ajoutant 2 unités à la caractéristique, on ajoute le log. de 100 ; le nombre 6276,57, que l'on obtient, est donc 100 fois trop grand; il faut donc le diviser par 100; ce qui s'exécute en avançant la virgule de deux places vers la gauche, comme le prescrit la règle. On trouverait de la même manière que le log. 0,56573, appartient au nombre décimal 3,679.

Ve Cas. *Pour trouver à quelle fraction appartient un log. négatif, distinguez deux cas. 1°. Si le log. donné est entièrement négatif, retranchez-le du nombre des unités de la caractéristique, augmenté de 4; le reste sera un log. positif, affecté de la caractéristique 3 ; cherchez à quel nombre appartient ce nouveau log.; placez ensuite autant de zéros plus un, sur la gauche de ce nombre, qu'il y a d'unités dans la caractéristique du log. proposé ; mettez alors la virgule sur la droite du premier zéro ; le résultat sera la fraction décimale à laquelle appartient le log. négatif proposé. 2°. Si la caractéristique seule est négative, supposez-la positive et égale à 3 ; cherchez à quel nombre appartient ce nouveau log. ; placez ensuite autant de zéros sur la gauche de ce nombre, qu'il y a d'unités dans la caractéristique négative ; transportant alors la virgule sur la droite du premier zéro, le résultat sera la fraction décimale à laquelle appartient le log. demandé.* Cette règle n'est qu'une conséquence de celle du n° 292, (4e cas).

Ier Exemple. Pour trouver à quel nombre appartient le log. entièrement négatif — 5,34104 ; on soustraira 5,34104, de 9, qui exprime le nombre 5 des unités de la caractéristique, augmenté de 4 ; le reste sera 3,65896 ; cherchant à quel nombre appartient ce dernier log., on trouvera 4560; plaçant sur la gauche de ce nombre, autant de zéros, plus un, qu'il y a d'unités dans la caractéristique négative 5, on écrira 0 000 004 560 ; si l'on met la virgule sur la droite du premier zéro, le résultat 0,000 004 560 sera la fraction décimale à laquelle appartient le log. négatif — 5,34104. Cela est évident, car le log. — 5,34104 appartenant à un certain nombre ; si l'on ajoute 9 unités, le résultat, 9 — 5,34104 ou 3,65896, sera le log. d'un nombre 4560, qui sera 1 000 000 000 fois trop grand; le nombre cherché est donc $\frac{4560}{1\ 000\ 000\ 000}$, ou 0,000 004 560; ce qui vérifie l'exactitude de la règle générale.

IIe Exemple. Pour trouver à quelle fraction appartient le log. $\overline{4}$,65896 ; dont la caractéristique seule est négative, on la supposera positive et égale à 3, ce qui donnera 3,65896 ; cherchant à quel nombre appartient ce nouveau log., on trouvera 4560 ; la caractéristique du log. proposé, contenant 4 unités, on mettra 4 zéros sur la gauche de 4560, et l'on écrira 00004560 ; plaçant alors la

virgule, sur la droite du premier zéro, le résultat 0,00004560 exprimera le nombre auquel appartient le log. négatif $\bar{4}$,65896. En voici la raison ; le log. 3,65896, appartenant au nombre 4560 ; si l'on retranche 7 unités de la caractéristique 3, le résultat $\bar{7}$,65896, appartiendra à un nombre 10 000 000 fois plus petit que 4560 ; ce nombre est donc $\frac{4560}{10\,000\,000}$, ou 0,00004560.

294. Les règles précédentes, fournissent la solution de ce problème général : *Un nombre étant donné, trouver son log. ; Un log. étant donné, trouver le nombre auquel il appartient.* Nous avons toujours ramené les log. à la caractéristique 3, parce qu'elle correspond aux nombres de quatre chiffres, qui sont les plus grands nombres contenus dans nos tables, et que les erreurs sont d'autant plus petites, que les nombres sont plus grands. Pour en convaincre, nous chercherons le produit de 2,745, par 20,01. *Le log. d'un produit étant égal à la somme des log. de ses facteurs* (n° 226), si l'on cherche les log. des facteurs, on trouvera que le log. du produit demandé est 1,73979. Si, d'après la règle du n° 293, 4e cas, on cherche à quel nombre appartient le log. 1,73979, on trouvera 54,92750 ; mais le produit exact est 54,92745 ; l'erreur due à l'emploi des log., est donc 5 cent-millièmes. On trouverait une erreur beaucoup plus forte, en cherchant directement à quel nombre appartient le log. 1,73979 ; car ce log. tombant entre ceux de 54 et 55, qui sont 1,73239 et 1,74036, on dirait, la différence 0,00797, entre les log. de 54 et de 55, est à la différence 1, entre ces nombres, comme la différence 0,00740, entre mon log. et celui de 54, est à la différence entre 54 et le nombre cherché. Le quatrième terme de cette proportion est 0,92848 etc. ; le nombre cherché est donc 54,92848 ; mais le vrai produit est 54,92745 ; l'erreur est donc de 103 cent-millièmes, quand on prend la caractéristique 1 ; tandis que cette erreur n'est que de 5 cent-millièmes, quand on prend la caractéristique 3. Cette remarque est de la plus grande importance. En comparant le produit exact 54,92745, avec le produit 54,92750, donné par les log., on voit que les cinq premiers chiffres à gauche du résultat sont exacts ; l'erreur ne commence qu'au sixième chiffre. En général, lorsqu'on opère avec nos log. à cinq décimales, et d'après les règles que nous avons données, on obtient la plus grande approximation dont les tables sont susceptibles ; elle est telle qu'*on peut toujours compter sur l'exactitude des quatre premiers chiffres à gauche du résultat. Quand cette approximation n'est pas suffisante, on doit abandonner l'emploi des log., ou opérer avec des tables plus étendues.*

295. Les logarithmes des nombres, 10, 100, 1000, etc., étant 1, 2, 3, etc., (n° 219). On voit que *le logarithme d'une quantité est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la* BASE 10, *pour obtenir cette quantité.* Ainsi, la troisième puissance de 10 étant 1000, le log. de 1000 est 3.

296. *Les logarithmes des nombres entiers, 2, 3, 4, etc., compris entre 1, 10, 100, etc., sont incommensurables.* Cela se réduit à prouver que *le log. d'un nombre entier ne peut pas être une fraction.* Si le log. d'un nombre entier e, pouvait être une fraction $\frac{b}{a}$, on aurait (n° 295)...

$$10^{\frac{b}{a}} = e \text{ ; d'où (1)} \ldots . 10^b = e^a.$$

Le premier membre de l'équation (1) ne contenant que les facteurs 2 et 5,

le second membre ne peut renfermer que ces facteurs. L'équation (1) est donc de cette forme,

$$(2.5)^b = (2^p.5^q)^a \text{; d'où } 2^b \times 5^b = 2^{pa} \times 5^{qa}.$$

Chaque membre devant contenir le même nombre de facteurs, on aurait

$$b = pa = qa \text{; d'où, } \frac{b}{a} = p = q.$$

La fraction $\frac{b}{a}$ serait donc égale à un nombre entier; ce qui est impossible. Le log. d'un nombre entier ne peut donc pas être une fraction; ce qui démontre le principe énoncé. Nos tables ne contiennent que les cinq premières décimales de ces log. incommensurables.

Remarque. Les règles des Nos 290 et 291, se rapportent à des logarithmes incommensurables. Elles pourraient induire en erreur, si les log. étaient commensurables. Dans ce dernier cas, les formules générales,

$$l(10^{\alpha}) = \alpha,\ l(10^{-\alpha}) = l\left(\frac{1}{10^{\alpha}}\right) = -\alpha,$$

(α désigne un nombre entier positif), conduisent directement au résultat. Ainsi,

$$l(10000) = l(10^4) = 4;\ l(0{,}0001) = l\left(\frac{1}{10000}\right) = l\left(\frac{1}{10^4}\right) = -4;$$

$$4 = l(10^4) = l(10000);\ -4 = l\left(\frac{1}{10^4}\right) = l\left(\frac{1}{10000}\right) = l(0{,}0001).$$

Rapports très-approchés des nouvelles Mesures aux anciennes.

4 myriamètres, ou lieues nouvelles, valent 9 lieues terrestres.
82 mètres, valent 69 aunes (de Paris). 72 mètres, valent 39 toises.
13 décimètres, valent 4 pieds. 19 centimètres, valent 7 pouces.
80 francs, valent 81 livres tournois.

Le rayon de l'équateur terrestre est de 3 271 226 toises. L'aplatissement aux pôles est la 334e partie du rayon, ou 9794 toises. Le demi-axe de la terre, ou la distance du centre au pôle, est donc 3 261 432 toises. La distance du pôle à l'équateur, mesurée sur le méridien qui passe par Paris, est 5 130 740 toises; le degré terrestre, qui en est la 90e partie, vaut donc 57 008 toises. Le mètre vaut, 3 pieds, 078 444 ou 3 pieds 11 lignes $\frac{296}{1000}$. La nouvelle chaîne d'arpenteur, est le double décamètre; elle vaut 20 mètres, ou 10 toises 1 pied 6 pouces 10 lignes. La lieue terrestre, de 25 au degré, vaut 2280 toises. La lieue de poste est de 2000 toises. Dans le cercle, dont le rayon est l'unité, la longueur π de la demi-circonférence, est égale à, 3, 14159 26535 89793 etc. Si r désigne la longueur du rayon, la longueur de la circonférence sera $2\pi r$, la surface du cercle sera πr^2, la surface de la sphère vaudra $4\pi r^2$, et $\frac{4}{3}\pi r^3$ exprimera le volume de la sphère. L'arc dont la longueur est égale au rayon, est de 57° 17′ 44″ (ancienne division). La longueur du pendule à secondes, à 10 degrés de chaleur, dans le vide, est à Paris de 3 pieds 8 lignes $\frac{6}{10}$ et à l'équateur de 3 pieds 7 lignes $\frac{21}{100}$. L'année solaire est de 365 jours 5 heures 48 minutes 45 secondes.

Table pour réduire un nombre quelconque de mesures *linéaires* anciennes, en mesures nouvelles, et réciproquement.

N.	Lieues terrestr. en kilomèt.*	Lieues marines en kilom. **	Toises en mètres.	Pieds en mètres.	Pouces en mètres.	Lignes en mètres.	N.	Aunes en mètres.***	N.	Fractions d'aune en mètres	N.	Fractions d'aune en mètres.	N.	Fractions d'aune en mètres.
1	4,4444	5,5556	1,94904	0,32484	0,027070	0,002256	1	1,18845	$\frac{1}{2}$	0,594	$\frac{3}{4}$	0,743	$\frac{7}{16}$	0,520
2	8,8889	11,1111	3,89807	0,64968	0,054140	0,004512	2	2,37689	$\frac{1}{4}$	0,396	$\frac{3}{8}$	0,049	$\frac{9}{16}$	0,669
3	13,3333	16,6667	5,84711	0,97452	0,081210	0,006768	3	3,56534	$\frac{3}{4}$	0,792	$\frac{1}{2}$	0,099	$\frac{11}{16}$	0,817
4	17,7778	22,2222	7,79615	1,29936	0,108280	0,009024	4	4,75378	$\frac{3}{8}$	0,297	$\frac{5}{8}$	0,495	$\frac{13}{16}$	0,966
5	22,2222	27,7778	9,74519	1,62420	0,135350	0,011280	5	5,94228	$\frac{5}{8}$	0,891	$\frac{3}{4}$	0,693	$\frac{15}{16}$	1,114
6	26,6667	33,3333	11,69422	1,94904	0,162419	0,013536	9	7,13068	$\frac{3}{4}$	0,198	$\frac{1}{16}$	0,089		
7	31,1111	38,8889	13,64326	2,27388	0,189489	0,015792	7	8,31912	$\frac{7}{8}$	0,990	$\frac{1}{8}$	0,074		
8	35,5556	44,4444	15,59230	2,59872	0,216559	0,018048	8	6,50757	$\frac{9}{8}$	0,149	$\frac{3}{16}$	0,223		
9	40,0000	50,0000	17,54133	2,92356	0,243629	0,020304	9	10,69601	$\frac{5}{8}$	0,446	$\frac{1}{16}$	0,371		
10	44,4444	55,5556	19,49037	3,24840	0,270699	0,022560	10	11,88446	$\frac{7}{8}$					

N.	Kilomètres en lieues terrestres.	Kilom. en lieues mar.	Mètres en toises.	Mètres en pieds.	Mètres en pouces.	Mètres en lignes.	N.	Mètres en aunes de Par.
1	0,225	0,18	0,51207	3,07844	36,9413	443,296	1	0,84144
2	0,450	0,36	1,02615	6,15689	73,8827	886,592	2	1,68287
3	0,675	0,54	1,53922	9,23533	110,8240	1329,888	3	2,52431
4	0,900	0,72	2,05230	12,31378	147,7653	1773,184	4	3,36574
5	1,125	0,90	2,56537	15,39222	184,7067	2216,480	5	4,20718
6	1,350	1,08	3,07844	18,47066	221,6480	2659,775	6	5,04861
7	1,575	1,26	3,59152	21,54911	258,5893	3103,071	7	5,89005
8	1,800	1,44	4,10459	24,62755	295,5306	3546,367	8	6,73148
9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	9	[illegible]

* La lieue de 25 au degré vaut 2280^{toises},33 d'après le mètre définitif.

** La lieue marine de 20 au degré vaut 2850^{toises},41.

*** L'aune de Paris vaut 3 pieds 7 pouces 10 lignes $\frac{1}{2}$.

TABLE pour réduire un nombre quelconque de mesures agraires anciennes,

N.	Toises quar. en mètres quarr.	Pieds quar. en mètres quarr.	Pouces quar. en mètres quarr.	Lignes quar. en mètres quarr.	N.	Lieues quarrées en myriamètres quarrés.	Lieues quarrées en myriares.	Arp. Eaux et For. en hec. ou perches quarrées en ares.	Arp. de Paris en hectares ou perch. quarrées en ares.
1	3,798754	0,105521	0,00073278	0,000005089	1	0,1975309	19,75309	0,510720	0,341887
2	7,597487	0,211041	0,00146556	0,000010178	2	0,3950617	39,50617	1,021440	0,683774
3	11,396231	0,316562	0,00219834	0,000015267	3	0,5925926	59,25926	1,532160	1,025661
4	15,194975	0,422083	0,00293112	0,000020356	4	0,7901234	79,01234	2,042880	1,367548
5	18,993718	0,527604	0,00366390	0,000025445	5	0,9876543	98,76543	2,553600	1,709435
6	22,792462	0,633124	0,00439668	0,000030534	6	1,1851852	118,51852	3,064320	2,051322
7	26,591205	0,738645	0,00512946	0,000035623	7	1,3827160	138,27160	3,575040	2,393209
8	30,389949	0,844166	0,00586224	0,000040712	8	1,5802469	158,02469	4,085760	2,735096
9	34,188693	0,949686	0,00659502	0,000045801	9	1,7777777	177,77777	4,596480	3,076983
10	37,987436	1,055207	0,00732780	0,000050890	10	1,9753086	197,53086	5,107200	3,418870

N.	Mètres quar. en toises quarr.	Mètres quar. en pieds quarrés.	Mètres quar. en pouces quarr.	Mètres quar. en lignes quarr.	N.	Myriamètres quarrés en lieues quarrées.	Myriares en lieues quarrées.	Hectares en arp. Eaux et F. ou ares en perches quarrées.	Hectares en arp. de Paris, ou ares en perches quarrées.
1	0,263245	9,47682	1364,66	196511	1	5,0625	0,506625	1,958020	2,924943
2	0,526490	18,95363	2729,32	393023	2	10,1250	0,101250	3,916040	5,849886
3	0,789735	28,43045	4093,99	589534	3	15,1875	0,151875	5,874060	8,774829
4	1,052980	37,90726	5458,65	786045	4	20,2500	0,202500	7,832080	11,699772
5	1,316225	47,38408	6823,31	982557	5	25,3125	0,253125	9,790100	14,624715
6	1,579469	56,86090	8187,97	1179068	6	30,3750	0,303750	11,748120	17,549658
7	1,842714	66,33771	9552,63	1375579	7	35,4375	0,354375	13,706140	20,474601
8	2,105959	75,81453	10917,30	1572090	8	40,5000	0,405000	15,664160	23,399544
9	2,369204	85,20134	12281,96	1768602	9	45,5625	0,455625	17,622180	26,324487
10	2,632449	94,76816	13646,62	1965113	10	50,6250	0,506250	19,580200	29,249430

COMPARAISON *de quelques mesures étrangères, avec les nouvelles mesures françaises.*

MESURES LINÉAIRES.	Millim.
Ancien pié français	324,7
Pié anglais	304,7
Vare de Castille	836,6
Pié du Rhin	313,9
De Vienne	316,0
D'Amsterdam	283,0
De Suède	297,1
De Russie	354,1
De la Chine	320,0

POIDS.		Gram.
Liv. poids de marc		489,2
Angl.	livre troy	372,6
	avoir du poise	453,1
Castille		459,4
Cologne		467,4
Vienne		558,6
Amsterdam		491,4
Suède		424,6
Russie		409,5

VALEUR *des Monnaies étrangères, d'après M.* BONNEVILLE (*).

Le *titre* (la quantité d'argent ou d'or) est exprimée en millièmes de la pièce.

	TITRE.	VALEUR.
ANGLETERRE.		
Couronne [Crown] à 5 shellings	0,917	6f. 02c.
Shelling	0,920	1 20
Guinée de Georges III	0,917	26 26
AUTRICHE ET BOHÊME.		
Double souverain d'or	0,915	34 89
Speicies reichsthaler	0,830	5 10
Florin [Gulden] à 60 kreutzer	0,833	2 56
10 kreuzers	0,486	0 41
Ducat de François II [or]	0,986	11 69
Carolin [or] de Bavière	0,771	25 74
Max. d'or *idem*	0,768	16 95
Florin d'or d'Hanovre	0,781	8 69
HOLLANDE.		
Florin	0,913	2 10
Ducats [or]	0,979	11 61
Ruyder [or]	0,917	31 28
Ducaton [argent]	0,934	6 65
Daler	0,861	5 30
DANEMARCK ET HOLSTEIN.		
Species reichsthaler	0,875	5 55
Christian d'or [Chrétien d'or] dep. 1775.	0,905	20 80

(*) Voyez l'Annuaire publié par le Bureau des Longitudes.

ÉTAT ÉCCLÉSIASTIQUE.	TITRE.	VALEUR.
Scudo de Pie VI	0,913	5f. 29c.
Testone *idem*	0,913	1 58
Papeto *idem*	0,906	1 03
Paolo *idem*	0,913	0 53
Zecchino *ou* sequin [or] *idem*	0,996	11 63
Doppie depuis 1775 *idem*	0,909	17 25
ESPAGNE.		
Piastre, depuis 1772	0,896	5 29
Pesetas à 4 réaux	0,813	1 04
Real nuevo à 2 réaux	0,809	0 52
Real de Vellon	0,809	0 26
Pistole, depuis 1772 [or]	0,893	20 69
Escudillos, depuis 1786 [or]	0,885	5 33
GÈNES.		
Zecchino	0,995	11 80
RÉPUBLIQUE HELVÉTIQUE.		
Ecu de Bâle à 30 batzen	0,833	4 23
Florin de Bâle à 15 batzen	0,833	2 11
Ecu de Zuric à 2 florins	0,844	4 67
Florin de Zuric à 40 shellings	0,840	2 34
Ducat	0,978	11 59
NAPLES.		
Scudo à 120 grani, depuis 1784	0,840	5 04
Ducato à 100 grani, depuis 1784	0,840	4 18
Pièce de 6 ducati de Ferdinand IV	0,845	25 59
PARME.		
Ducato, depuis 1784	0,906	5 10
PORTUGAL.		
Crusado à 480 rees	0,896	2 86
Dobraons	0,917	169 12
Dobras	0,915	89 97
Mille rees [or]	0,913	8 16
PRUSSE.		
Reichsthaler à 24 groschen	0,740	3 59
Frédéric d'or	0,901	20 54
RAGUSE.		
Visline ou ragusine	0,576	3 60
ROME.		
Scudo	0,906	5 27
Zecchino *ou* sequin	0,996	11 63
Testone	0,903	1 56

COMPARAISON *de quelques mesures étrangères, avec les nouvelles mesures françaises.*

MESURES LINÉAIRES.	Millim.	POIDS.	Gram.
Ancien pié français	324,7	Liv. poids de marc	489,2
Pié anglais	304,7	Angl. livre troy	372,6
Vare de Castille	836,6	Angl. avoir du poise	453,1
Pié du Rhin	313,9	Castille	459,4
De Vienne	316,0	Cologne	467,4
D'Amsterdam	283,0	Vienne	558,6
De Suède	297,1	Amsterdam	491,4
De Russie	354,1	Suède	424,6
De la Chine	320,0	Russie	409,5

VALEUR *des Monnaies étrangères, d'après M.* BONNEVILLE (*).

Le *titre* (la quantité d'argent ou d'or) est exprimée en millièmes de la pièce.

	TITRE.	VALEUR.	
ANGLETERRE.			
Couronne [Crown] à 5 shellings	0,917	6f.	02c.
Shelling	0,920	1	20
Guinée de Georges III	0,917	26	26
AUTRICHE ET BOHÊME.			
Double souverain d'or	0,915	34	89
Speicies reichsthaler	0,830	5	10
Florin [Gulden] à 60 kreutzer	0,833	2	56
10 kreuzers	0,486	0	41
Ducat de François II [or]	0,986	11	69
Carolin [or] de Bavière	0,771	25	74
Max. d'or *idem*	0,768	16	95
Florin d'or d'Hanovre	0,781	8	69
HOLLANDE.			
Florin	0,913	2	10
Ducats [or]	0,979	11	61
Ruyder [or]	0,917	31	28
Ducaton [argent]	0,934	6	65
Daler	0,861	5	30
DANEMARCK ET HOLSTEIN.			
Species reichsthaler	0,875	5	55
Christian d'or [Chrétien d'or] dep. 1775.	0,905	20	80

(*) Voyez l'Annuaire publié par le Bureau des Longitudes.

ÉTAT ÉCCLÉSIASTIQUE.	TITRE.	VALEUR.
Scudo de Pie VI	0,913	5f. 29c.
Testone *idem*	0,913	1 58
Papeto *idem*	0,906	1 03
Paolo *idem*	0,913	0 53
Zecchino *ou* sequin [or] *idem*	0,996	11 63
Doppie depuis 1775 *idem*	0,909	17 25
ESPAGNE.		
Piastre, depuis 1772	0,896	5 29
Pesetas à 4 réaux	0,813	1 04
Real nuevo à 2 réaux	0,809	0 52
Real de Vellon	0,809	0 26
Pistole, depuis 1772 [or]	0,893	20 69
Escudillos, depuis 1786 [or]	0,885	5 33
GÊNES.		
Zecchino	0,995	11 80
RÉPUBLIQUE HELVÉTIQUE.		
Ecu de Bâle à 30 batzen	0,833	4 23
Florin de Bâle à 15 batzen	0,833	2 11
Ecu de Zuric à 2 florins	0,844	4 67
Florin de Zuric à 40 shellings	0,840	2 34
Ducat	0,978	11 59
NAPLES.		
Scudo à 120 grani, depuis 1784	0,840	5 04
Ducato à 100 grani, depuis 1784	0,840	4 18
Pièce de 6 ducati de Ferdinand IV	0,845	25 59
PARME.		
Ducato, depuis 1784	0,906	5 10
PORTUGAL.		
Crusado à 480 rees	0,896	2 86
Dobraons	0,917	169 12
Dobras	0,915	89 97
Mille rees [or]	0,913	8 16
PRUSSE.		
Reichsthaler à 24 groschen	0,740	3 59
Frédéric d'or	0,901	20 54
RAGUSE.		
Visline ou ragusine	0,576	3 60
ROME.		
Scudo	0,906	5 27
Zecchino *ou* sequin	0,996	11 63
Testone	0,903	1 56

	TITRE.	VALEUR.
RUSSIE.		
Rouble à 100 kopeck, depuis 1762.....	0,875	4f. 0ne.
Impérial à 10 roubles [papier monnaie].	0,969	28 64
SARDAIGNE.		
Scudo à 2 lire ½.....	0,896	4 60
Lira.....	.....	1 84
Carlino à 25 lire.....	0,890	49 03
SAVOIE ET PIÉMONT.		
Scudo à 6 lire, depuis 1755.....	0,906	6 96
Lira.....	.....	1 16
SAXE.		
Species reichsthaler à 32 groschen.....	0,833	5 11
Gulden [Florin].....	0,830	2 55
Auguste d'or.....	0,898	20 48
SICILE.		
Scudo à 12 tari.....	0,826	4 94
Onzia [or] 1751.....	0,859	13 00
SUÈDE.		
Species daler à 48 shellings, depuis 1777.	0,875	5 62
Ducat, depuis 1777.....	0,977	11 58
TOSCANE.		
Francesconi ou Leopoldini à 10 paoli...	0,913	5 48
Lira.....	0,953	0 82
Ruspono.....	0,997	35 65
Zecchino ou Ruspo.....	0,999	11 84
TURQUIE.		
Piastre à 40 paras.....	0,500	2 09
Zeri mahoud, depuis 1781.....	0,803	6 45
Fonduc, depuis 1769.....	0,799	9 47
VENISE.		
Ducato à 8 lire.....	0,816	4 04
Scudo della croze à 12,4 lire.....	0,947	6 51
Talero à 10 lire.....	0,826	5 19
Zecchino.....	0,997	11 82
Ducato d'oro.....	0,996	7 47
Osella à 3,9 lire.....	0,948	2 03
ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE.		
Le dollar.....	0,875	5 16

FIN DES NOTES.

De l'Imprimerie de Mme Ve Courcier, rue du Jardinet, n° 12, quartier Saint-André-des-Arts.

ERRATA des Notes sur l'Arithmétique.

ıge 50, dernière ligne; au lieu de n° 208, *lisez* n° 268
63, ligne 4 en remontant; au lieu de 63, *lisez* 53
65, 8; au lieu de, ou 1, *lisez* ou $1^{pé}$
118, 10; au lieu de, $p < b$, *lisez* $p < b^2$
118, 1 du n° 227; au lieu de, *entier*, lisez *entier quelconque*
120, 13; au lieu de, *de b*, lisez *de d*

124. Dans le n° 250, on suppose que les diviseurs, d_1, d_2, d_3,..., d_n, nt moindres que $\sqrt{N}$; de sorte que les quotiens correspondans, q_1, q_2, ,..., q_n, sont plus grands que $\sqrt{N}$. Il en résulte que chacun des pro- its, q_1d_1, q_2d_2, q_3d_3,..., q_nd_n, est formé de deux facteurs différens. nsi, pour plus de clarté, on substituera aux lignes 8 et 9, du n° 250, ce i suit:

, d_2, d_3,..., d_n, moindres que $\sqrt{N}$, et divisant N par chacun de ces viseurs, on obtiendra n quotiens différens, q_1, q_2, q_3,..., q_n, plus ands que $\sqrt{N}$; ce qui donnera

ıge 125, dernière ligne; au lieu de, dutible, *lisez* ductible
128, ligne 24; au lieu de, successifs e unités, *lisez* successifs en unités
134, 5; *changez* $+n$ en $-n$
140, 8; au lieu de, sont positifs, *lisez* sont entiers positifs
144, 6 en remontant; au lieu de, l'équation (1), *lisez* l'équation (2)

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
1	00000	51	70757	101	00432	151	17898	201	30320
2	30103	52	71600	102	00860	152	18184	202	30535
3	47712	53	72428	103	01284	153	18469	203	30750
4	60206	54	73239	104	01703	154	18752	204	30963
5	69897	55	74036	105	02119	155	19033	205	31175
6	77815	56	74819	106	02531	156	19312	206	31387
7	84510	57	75587	107	02938	157	19590	207	31597
8	90309	58	76343	108	03342	158	19866	208	31806
9	95424	59	77085	109	03743	159	20140	209	32015
10	00000	60	77815	110	04139	160	20412	210	32222
11	04139	61	78533	111	04532	161	20683	211	32428
12	07918	62	79239	112	04922	162	20952	212	32634
13	11394	63	79934	113	05308	163	21219	213	32838
14	14613	64	80618	114	05690	164	21484	214	33041
15	17609	65	81291	115	06070	165	21748	215	33244
16	20412	66	81954	116	06446	166	22011	216	33445
17	23045	67	82607	117	06819	167	22272	217	33646
18	25527	68	83251	118	07188	168	22531	218	33846
19	27875	69	83885	119	07555	169	22789	219	34044
20	30103	70	84510	120	07918	170	23045	220	34242
21	32222	71	85126	121	08279	171	23300	221	34439
22	34242	72	85733	122	08636	172	23553	222	34635
23	36173	73	86332	123	08991	173	23805	223	34830
24	38021	74	86923	124	09342	174	24055	224	35025
25	39794	75	87506	125	09691	175	24304	225	35218
26	41497	76	88081	126	10037	176	24551	226	35411
27	43136	77	88649	127	10380	177	24797	227	35603
28	44716	78	89209	128	10721	178	25042	228	35793
29	46240	79	89763	129	11059	179	25285	229	35984
30	47712	80	90309	130	11394	180	25527	230	36173
31	49136	81	90849	131	11727	181	25768	231	36361
32	50515	82	91381	132	12057	182	26007	232	36549
33	51851	83	91908	133	12385	183	26245	233	36736
34	53148	84	92428	134	12710	184	26482	234	36922
35	54407	85	92942	135	13033	185	26717	235	37107
36	55630	86	93450	136	13354	186	26951	236	37291
37	56820	87	93952	137	13672	187	27184	237	37475
38	57978	88	94448	138	13988	188	27416	238	37658
39	59106	89	94939	139	14301	189	27646	239	37840
40	60206	90	95424	140	14613	190	27875	240	38021
41	61278	91	95904	141	14922	191	28103	241	38202
42	62325	92	96379	142	15229	192	28330	242	38382
43	63347	93	96848	143	15534	193	28556	243	38561
44	64345	94	97313	144	15836	194	28780	244	38739
45	65321	95	97772	145	16137	195	29003	245	38917
46	66276	96	98227	146	16435	196	29226	246	39094
47	67210	97	98677	147	16732	197	29447	247	39270
48	68124	98	99123	148	17026	198	29667	248	39445
49	69020	99	99564	149	17319	199	29885	249	39620
50	69897	100	00000	150	17609	200	30103	250	39794

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
251	39967	301	47857	351	54531	401	60314	451	65418
252	40140	302	48001	352	54654	402	60423	452	65514
253	40312	303	48144	353	54777	403	60531	453	65610
254	40483	304	48287	354	54900	404	60638	454	65706
255	40654	305	48430	355	55023	405	60746	455	65801
256	40824	306	48572	356	55145	406	60853	456	65896
257	40993	307	48714	357	55267	407	60959	457	65992
258	41162	308	48855	358	55388	408	61066	458	66087
259	41330	309	48996	359	55509	409	61172	459	66181
260	41497	310	49136	360	55630	410	61278	460	66276
261	41664	311	49276	361	55751	411	61384	461	66370
262	41830	312	49415	362	55871	412	61490	462	66464
263	41996	313	49554	363	55991	413	61595	463	66558
264	42160	314	49693	364	56110	414	61700	464	66652
265	42325	315	49831	365	56229	415	61805	465	66745
266	42488	316	49969	366	56348	416	61909	466	66839
267	42651	317	50106	367	56467	417	62014	467	66932
268	42813	318	50243	368	56585	418	62118	468	67025
269	42975	319	50379	369	56703	419	62221	469	67117
270	43136	320	50515	370	56820	420	62325	470	67210
271	43297	321	50651	371	56937	421	62428	471	67302
272	43457	322	50786	372	57054	422	62531	472	67394
273	43616	323	50920	373	57171	423	62634	473	67486
274	43775	324	51055	374	57287	424	62737	474	67578
275	43933	325	51188	375	57403	425	62839	475	67669
276	44091	326	51322	376	57519	426	62941	476	67761
277	44248	327	51455	377	57634	427	63043	477	67852
278	44404	328	51587	378	57749	428	63144	478	67943
279	44560	329	51720	379	57864	429	63246	479	68034
280	44716	330	51851	380	57978	430	63347	480	68124
281	44871	331	51983	381	58092	431	63448	481	68215
282	45025	332	52114	382	58206	432	63548	482	68305
283	45179	333	52244	383	58320	433	63649	483	68395
284	45332	334	52375	384	58433	434	63749	484	68485
285	45484	335	52504	385	58546	435	63849	485	68574
286	45637	336	52634	386	58659	436	63949	486	68664
287	45788	337	52763	387	58771	437	64048	487	68753
288	45939	338	52892	388	58883	438	64147	488	68842
289	46090	339	53020	389	58995	439	64246	489	68931
290	46240	340	53148	390	59106	440	64345	490	69020
291	46389	341	53275	391	59218	441	64444	491	69108
292	46538	342	53403	392	59329	442	64542	492	69197
293	46687	343	53529	393	59439	443	64640	493	69285
294	46835	344	53656	394	59550	444	64738	494	69373
295	46982	345	53782	395	59660	445	64836	495	69461
296	47129	346	53908	396	59770	446	64933	496	69548
297	47276	347	54033	397	59879	447	65031	497	69636
298	47422	348	54158	398	59988	448	65128	498	69723
299	47567	349	54283	399	60097	449	65225	499	69810
300	47712	350	54407	400	60206	450	65321	500	69897

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
501	69984	551	74115	601	77887	651	81358	701	84572
502	70070	552	74194	602	77960	652	81425	702	84634
503	70157	553	74273	603	78032	653	81491	703	84696
504	70243	554	74351	604	78104	654	81558	704	84757
505	70329	555	74429	605	78176	655	81624	705	84819
506	70415	556	74507	606	78247	656	81690	706	84880
507	70501	557	74586	607	78319	657	81757	707	84942
508	70586	558	74663	608	78390	658	81823	708	85003
509	70672	559	74741	609	78462	659	81889	709	85065
510	70757	560	74819	610	78533	660	81954	710	85126
511	70842	561	74896	611	78604	661	82020	711	85187
512	70927	562	74974	612	78675	662	82086	712	85248
513	71012	563	75051	613	78746	663	82151	713	85309
514	71096	564	75128	614	78817	664	82217	714	85370
515	71181	565	75205	615	78888	665	82282	715	85431
516	71265	566	75282	616	78958	666	82347	716	85491
517	71349	567	75358	617	79029	667	82413	717	85552
518	71433	568	75435	618	79099	668	82478	718	85612
519	71517	569	75511	619	79169	669	82543	719	85673
520	71600	570	75587	620	79239	670	82607	720	85733
521	71684	571	75664	621	79309	671	82672	721	85794
522	71767	572	75740	622	79379	672	82737	722	85854
523	71850	573	75815	623	79449	673	82802	723	85914
524	71933	574	75891	624	79518	674	82866	724	85974
525	72016	575	75967	625	79588	675	82930	725	86034
526	72099	576	76042	626	79657	676	82995	726	86094
527	72181	577	76118	627	79727	677	83059	727	86153
528	72263	578	76193	628	79796	678	83123	728	86213
529	72346	579	76268	629	79865	679	83187	729	86273
530	72428	580	76343	630	79934	680	83251	730	86332
531	72509	581	76418	631	80003	681	83315	731	86392
532	72591	582	76492	632	80072	682	83378	732	86451
533	72673	583	76567	633	80140	683	83442	733	86510
534	72754	584	76641	634	80209	684	83506	734	86570
535	72835	585	76716	635	80277	685	83569	735	86629
536	72916	586	76790	636	80346	686	83632	736	86688
537	72997	587	76864	637	80414	687	83696	737	86747
538	73078	588	76938	638	80482	688	83759	738	86806
539	73159	589	77012	639	80550	689	83822	739	86864
540	73239	590	77085	640	80618	690	83885	740	86923
541	73320	591	77159	641	80686	691	83948	741	86982
542	73400	592	77232	642	80754	692	84011	742	87040
543	73480	593	77305	643	80821	693	84073	743	87099
544	73560	594	77379	644	80889	694	84136	744	87157
545	73640	595	77452	645	80956	695	84198	745	87216
546	73719	596	77525	646	81023	696	84261	746	87274
547	73799	597	77597	647	81090	697	84323	747	87332
548	73878	598	77670	648	81158	698	84386	748	87390
549	73957	599	77743	649	81224	699	84448	749	87448
550	74036	600	77815	650	81291	700	84510	750	87506

761	88138	811	90902	861	93500	911	95952		
762	88195	812	90956	862	93551	912	95999		
763	88252	813	91009	863	93601	913	96047		
764	88309	814	91062	864	93651	914	96095		
765	88366	815	91116	865	93702	915	96142		
766	88423	816	91169	866	93752	916	96190		
767	88480	817	91222	867	93802	917	96237		
768	88536	818	91275	868	93852	918	96284		
769	88593	819	91328	869	93902	919	96332		
770	88649	820	91381	870	93952	920	96379		
771	88705	821	91434	871	94002	921	96426		
772	88762	822	91487	872	94052	922	96473		
773	88818	823	91540	873	94101	923	96520		
774	88874	824	91593	874	94151	924	96567		
775	88930	825	91645	875	94201	925	96614		
776	88986	826	91698	876	94250	926	96661		
777	89042	827	91751	877	94300	927	96708		
778	89098	828	91803	878	94349	928	96755		
779	89154	829	91855	879	94399	929	96802		
780	89209	830	91908	880	94448	930	96848		
781	89265	831	91960	881	94498	931	96895		
782	89321	832	92012	882	94547	932	96942		
783	89376	833	92065	883	94596	933	96988		
784	89432	834	92117	884	94645	934	97035		
785	89487	835	92169	885	94694	935	97081		
786	89542	836	92221	886	94743	936	97128		
787	89597	837	92273	887	94792	937	97174		
788	89653	838	92324	888	94841	938	97220		
789	89708	839	92376	889	94890	939	97267		
790	89763	840	92428	890	94939	940	97313		

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
1001	00043	44	1051	02160	41	1101	04179	40	1151	06108	38	1201	07954	36
1002	00087	43	1052	02202	42	1102	04218	39	1152	06145	37	1202	07990	36
1003	00130	43	1053	02243	41	1103	04258	40	1153	06183	38	1203	08027	37
1004	00173	44	1054	02284	41	1104	04297	39	1154	06221	38	1204	08063	36
1005	00217	43	1055	02325	41	1105	04336	39	1155	06258	37	1205	08099	36
1006	00260	43	1056	02366	41	1106	04376	40	1156	06296	38	1206	08135	36
1007	00303	43	1057	02407	41	1107	04415	39	1157	06333	37	1207	08171	36
1008	00346	43	1058	02449	42	1108	04454	39	1158	06371	38	1208	08207	36
1009	00389	43	1059	02490	41	1109	04493	39	1159	06408	37	1209	08243	36
1010	00432	43	1060	02531	41	1110	04532	39	1160	06446	38	1210	08279	35
1011	00475	43	1061	02572	41	1111	04571	39	1161	06483	37	1211	08314	36
1012	00518	43	1062	02612	40	1112	04610	39	1162	06521	38	1212	08350	36
1013	00561	43	1063	02653	41	1113	04650	40	1163	06558	37	1213	08386	36
1014	00604	43	1064	02694	41	1114	04689	39	1164	06595	37	1214	08422	36
1015	00647	42	1065	02735	41	1115	04727	38	1165	06633	38	1215	08458	35
1016	00689	43	1066	02776	41	1116	04766	39	1166	06670	37	1216	08493	36
1017	00732	43	1067	02816	40	1117	04805	39	1167	06707	37	1217	08529	36
1018	00775	42	1068	02857	41	1118	04844	39	1168	06744	37	1218	08565	35
1019	00817	43	1069	02898	41	1119	04883	39	1169	06781	38	1219	08600	36
1020	00860	43	1070	02938	40	1120	04922	39	1170	06819	37	1220	08636	36
1021	00903	42	1071	02979	41	1121	04961	39	1171	06856	37	1221	08672	35
1022	00945	43	1072	03019	40	1122	04999	38	1172	06893	37	1222	08707	36
1023	00988	42	1073	03060	41	1123	05038	39	1173	06930	37	1223	08743	35
1024	01030	42	1074	03100	40	1124	05077	38	1174	06967	37	1224	08778	36
1025	01072	43	1075	03141	41	1125	05115	39	1175	07004	37	1225	08814	35
1026	01115	42	1076	03181	40	1126	05154	38	1176	07041	37	1226	08849	35
1027	01157	42	1077	03222	41	1127	05192	39	1177	07078	37	1227	08884	36
1028	01199	43	1078	03262	40	1128	05231	38	1178	07115	36	1228	08920	35
1029	01242	42	1079	03302	40	1129	05269	39	1179	07151	37	1229	08955	36
1030	01284	42	1080	03342	40	1130	05308	38	1180	07188	37	1230	08991	35
1031	01326	42	1081	03383	41	1131	05346	39	1181	07225	37	1231	09026	35
1032	01368	42	1082	03423	40	1132	05385	38	1182	07262	36	1232	09061	35
1033	01410	42	1083	03463	40	1133	05423	38	1183	07298	37	1233	09096	36
1034	01452	42	1084	03503	40	1134	05461	39	1184	07335	37	1234	09132	35
1035	01494	42	1085	03543	40	1135	05500	38	1185	07372	36	1235	09167	35
1036	01536	42	1086	03583	40	1136	05538	38	1186	07408	37	1236	09202	35
1037	01578	42	1087	03623	40	1137	05576	38	1187	07445	37	1237	09237	35
1038	01620	42	1088	03663	40	1138	05614	38	1188	07482	36	1238	09272	35
1039	01662	41	1089	03703	40	1139	05652	38	1189	07518	37	1239	09307	35
1040	01703	42	1090	03743	40	1140	05690	39	1190	07555	36	1240	09342	35
1041	01745	42	1091	03782	40	1141	05729	38	1191	07591	37	1241	09377	35
1042	01787	41	1092	03822	40	1142	05767	38	1192	07628	36	1242	09412	35
1043	01828	42	1093	03862	40	1143	05805	38	1193	07664	36	1243	09447	35
1044	01870	42	1094	03902	39	1144	05843	38	1194	07700	37	1244	09482	35
1045	01912	41	1095	03941	40	1145	05881	37	1195	07737	36	1245	09517	35
1046	01953	42	1096	03981	40	1146	05918	38	1196	07773	36	1246	09552	35
1047	01995	41	1097	04021	39	1147	05956	38	1197	07809	37	1247	09587	34
1048	02036	42	1098	04060	40	1148	05994	38	1198	07846	36	1248	09621	35
1049	02078	41	1099	04100	39	1149	06032	38	1199	07882	36	1249	09656	35
1050	02119		1100	04139		1150	06070		1200	07918		1250	09691	

N.	Log	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
1251	09726	35	1301	11428	34	1351	13066	33	1401	14644	31	1451	16167	30
1252	09760	34	1302	11461	33	1352	13098	32	1402	14675	31	1452	16197	30
1253	09795	35	1303	11494	33	1353	13130	32	1403	14706	31	1453	16227	30
1254	09830	35	1304	11528	34	1354	13162	32	1404	14737	31	1454	16256	29
1255	09864	34	1305	11561	33	1355	13194	32	1405	14768	31	1455	16286	30
1256	09899	35	1306	11594	33	1356	13226	32	1406	14799	31	1456	16316	30
1257	09934	35	1307	11628	34	1357	13258	32	1407	14829	30	1457	16346	30
1258	09968	34	1308	11661	33	1358	13290	32	1408	14860	31	1458	16376	30
1259	10003	35	1309	11694	33	1359	13322	32	1409	14891	31	1459	16406	30
1260	10037	34	1310	11727	33	1360	13354	32	1410	14922	31	1460	16435	29
1261	10072	35	1311	11760	33	1361	13386	32	1411	14953	30	1461	16465	30
1262	10106	34	1312	11793	33	1362	13418	32	1412	14983	31	1462	16495	30
1263	10140	34	1313	11826	33	1363	13450	31	1413	15014	31	1463	16524	29
1264	10175	35	1314	11860	34	1364	13481	32	1414	15045	31	1464	16554	30
1265	10209	34	1315	11893	33	1365	13513	32	1415	15076	30	1465	16584	30
1266	10243	34	1316	11926	33	1366	13545	32	1416	15106	31	1466	16613	29
1267	10278	35	1317	11959	33	1367	13577	32	1417	15137	31	1467	16643	30
1268	10312	34	1318	11992	32	1368	13609	31	1418	15168	30	1468	16673	30
1269	10346	34	1319	12024	33	1369	13640	32	1419	15198	31	1469	16702	29
1270	10380	34	1320	12057	33	1370	13672	32	1420	15229	30	1470	16732	30
1271	10415	35	1321	12090	33	1371	13704	31	1421	15259	31	1471	16761	29
1272	10449	34	1322	12123	33	1372	13735	32	1422	15290	30	1472	16791	30
1273	10483	34	1323	12156	33	1373	13767	32	1423	15320	31	1473	16820	29
1274	10517	34	1324	12189	33	1374	13799	31	1424	15351	30	1474	16850	30
1275	10551	34	1325	12222	32	1375	13830	32	1425	15381	31	1475	16879	29
1276	10585	34	1326	12254	33	1376	13862	31	1426	15412	30	1476	16909	30
1277	10619	34	1327	12287	33	1377	13893	32	1427	15442	31	1477	16938	29
1278	10653	34	1328	12320	32	1378	13925	31	1428	15473	30	1478	16967	30
1279	10687	34	1329	12352	33	1379	13956	32	1429	15503	31	1479	16997	29
1280	10721	34	1330	12385	33	1380	13988	31	1430	15534	30	1480	17026	30
1281	10755	34	1331	12418	32	1381	14019	32	1431	15564	30	1481	17056	29
1282	10789	34	1332	12450	33	1382	14051	31	1432	15594	31	1482	17085	29
1283	10823	34	1333	12483	33	1383	14082	32	1433	15625	30	1483	17114	29
1284	10857	34	1334	12516	32	1384	14114	31	1434	15655	30	1484	17143	30
1285	10890	33	1335	12548	33	1385	14145	31	1435	15685	30	1485	17173	29
1286	10924	34	1336	12581	32	1386	14176	32	1436	15715	31	1486	17202	29
1287	10958	34	1337	12613	33	1387	14208	31	1437	15746	30	1487	17231	29
1288	10992	34	1338	12646	32	1388	14239	31	1438	15776	30	1488	17260	29
1289	11025	33	1339	12678	32	1389	14270	31	1439	15806	30	1489	17289	30
1290	11059	34	1340	12710	33	1390	14301	32	1440	15836	30	1490	17319	29
1291	11093	34	1341	12743	32	1391	14333	31	1441	15866	31	1491	17348	29
1292	11126	33	1342	12775	33	1392	14364	31	1442	15897	30	1492	17377	29
1293	11160	34	1343	12808	32	1393	14395	31	1443	15927	30	1493	17406	29
1294	11193	33	1344	12840	32	1394	14426	31	1444	15957	30	1494	17435	29
1295	11227	34	1345	12872	33	1395	14457	32	1445	15987	30	1495	17464	29
1296	11261	34	1346	12905	32	1396	14489	31	1446	16017	30	1496	17493	29
1297	11294	33	1347	12937	32	1397	14520	31	1447	16047	30	1497	17522	29
1298	11327	33	1348	12969	32	1398	14551	31	1448	16077	30	1498	17551	29
1299	11361	34	1349	13001	32	1399	14582	31	1449	16107	30	1499	17580	29
1300	11394	33	1350	13033		1400	14613		1450	16137		1500	17609	

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
1501	17638	29	1551	19061	28	1601	20439	27	1651	21775	27	1701	23070	25
1502	17667	29	1552	19089	28	1602	20466	27	1652	21801	26	1702	23096	26
1503	17696	29	1553	19117	28	1603	20493	27	1653	21827	26	1703	23121	25
1504	17725	29	1554	19145	28	1604	20520	27	1654	21854	27	1704	23147	26
1505	17754	29	1555	19173	28	1605	20548	28	1655	21880	26	1705	23172	25
1506	17782	28	1556	19201	28	1606	20575	27	1656	21906	26	1706	23198	26
1507	17811	29	1557	19229	28	1607	20602	27	1657	21932	26	1707	23223	25
1508	17840	29	1558	19257	28	1608	20629	27	1658	21958	26	1708	23249	26
1509	17869	29	1559	19285	28	1609	20656	27	1659	21985	27	1709	23274	25
1510	17898	29	1560	19312	27	1610	20683	27	1660	22011	26	1710	23300	26
1511	17926	28	1561	19340	28	1611	20710	27	1661	22037	26	1711	23325	25
1512	17955	29	1562	19368	28	1612	20737	27	1662	22063	26	1712	23350	25
1513	17984	29	1563	19396	28	1613	20763	26	1663	22089	26	1713	23376	26
1514	18013	29	1564	19424	28	1614	20790	27	1664	22115	26	1714	23401	25
1515	18041	28	1565	19451	27	1615	20817	27	1665	22141	26	1715	23426	25
1516	18070	29	1566	19479	28	1616	20844	27	1666	22167	26	1716	23452	26
1517	18099	29	1567	19507	28	1617	20871	27	1667	22194	27	1717	23477	25
1518	18127	28	1568	19535	28	1618	20898	27	1668	22220	26	1718	23502	25
1519	18156	29	1569	19562	27	1619	20925	27	1669	22246	26	1719	23528	26
1520	18184	28	1570	19590	28	1620	20952	27	1670	22272	26	1720	23553	25
1521	18213	29	1571	19618	28	1621	20978	26	1671	22298	26	1721	23578	25
1522	18241	28	1572	19645	27	1622	21005	27	1672	22324	26	1722	23603	25
1523	18270	29	1573	19673	28	1623	21032	27	1673	22350	26	1723	23629	26
1524	18298	28	1574	19700	27	1624	21059	27	1674	22376	26	1724	23654	25
1525	18327	29	1575	19728	28	1625	21085	26	1675	22401	25	1725	23679	25
1526	18355	28	1576	19756	28	1626	21112	27	1676	22427	26	1726	23704	25
1527	18384	29	1577	19783	27	1627	21139	27	1677	22453	26	1727	23729	25
1528	18412	28	1578	19811	28	1628	21165	26	1678	22479	26	1728	23754	25
1529	18441	29	1579	19838	27	1629	21192	27	1679	22505	26	1729	23779	25
1530	18469	28	1580	19866	28	1630	21219	27	1680	22531	26	1730	23805	26
1531	18498	29	1581	19893	27	1631	21245	26	1681	22557	26	1731	23830	25
1532	18526	28	1582	19921	28	1632	21272	27	1682	22583	26	1732	23855	25
1533	18554	28	1583	19948	27	1633	21299	27	1683	22608	25	1733	23880	25
1534	18583	29	1584	19976	28	1634	21325	26	1684	22634	26	1734	23905	25
1535	18611	28	1585	20003	27	1635	21352	27	1685	22660	26	1735	23930	25
1536	18639	28	1586	20030	27	1636	21378	26	1686	22686	26	1736	23955	25
1537	18667	28	1587	20058	28	1637	21405	27	1687	22712	26	1737	23980	25
1538	18696	29	1588	20085	27	1638	21431	26	1688	22737	25	1738	24005	25
1539	18724	28	1589	20112	27	1639	21458	27	1689	22763	26	1739	24030	25
1540	18752	28	1590	20140	28	1640	21484	26	1690	22789	26	1740	24055	25
1541	18780	28	1591	20167	27	1641	21511	27	1691	22814	25	1741	24080	25
1542	18808	28	1592	20194	27	1642	21537	26	1692	22840	26	1742	24105	25
1543	18837	29	1593	20222	28	1643	21564	27	1693	22866	26	1743	24130	25
1544	18865	28	1594	20249	27	1644	21590	26	1694	22891	25	1744	24155	25
1545	18893	28	1595	20276	27	1645	21617	27	1695	22917	26	1745	24180	25
1546	18921	28	1596	20303	27	1646	21643	26	1696	22943	26	1746	24204	24
1547	18949	28	1597	20330	27	1647	21669	26	1697	22968	25	1747	24229	25
1548	18977	28	1598	20358	28	1648	21696	27	1698	22994	26	1748	24254	25
1549	19005	28	1599	20385	27	1649	21722	26	1699	23019	25	1749	24279	25
1550	19033		1600	20412	27	1650	21748		1700	23045	26	1750	24304	

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
1	00000	51	70757	101	00432	151	17898	201	30320
2	30103	52	71600	102	00860	152	18184	202	30535
3	47712	53	72428	103	01284	153	18469	203	30750
4	60206	54	73239	104	01703	154	18752	204	30963
5	69897	55	74036	105	02119	155	19033	205	31175
6	77815	56	74819	106	02531	156	19312	206	31387
7	84510	57	75587	107	02938	157	19590	207	31597
8	90309	58	76343	108	03342	158	19866	208	31806
9	95424	59	77085	109	03743	159	20140	209	32015
10	00000	60	77815	110	04139	160	20412	210	32222
11	04139	61	78533	111	04532	161	20683	211	32428
12	07918	62	79239	112	04922	162	20952	212	32634
13	11394	63	79934	113	05308	163	21219	213	32838
14	14613	64	80618	114	05690	164	21484	214	33041
15	17609	65	81291	115	06070	165	21748	215	33244
16	20412	66	81954	116	06446	166	22011	216	33445
17	23045	67	82607	117	06819	167	22272	217	33646
18	25527	68	83251	118	07188	168	22531	218	33846
19	27875	69	83885	119	07555	169	22789	219	34044
20	30103	70	84510	120	07918	170	23045	220	34242
21	32222	71	85126	121	08279	171	23300	221	34439
22	34242	72	85733	122	08636	172	23553	222	34635
23	36173	73	86332	123	08991	173	23805	223	34830
24	38021	74	86923	124	09342	174	24055	224	35025
25	39794	75	87506	125	09691	175	24304	225	35218
26	41497	76	88081	126	10037	176	24551	226	35411
27	43136	77	88649	127	10380	177	24797	227	35603
28	44716	78	89209	128	10721	178	25042	228	35793
29	46240	79	89763	129	11059	179	25285	229	35984
30	47712	80	90309	130	11394	180	25527	230	36173
31	49136	81	90849	131	11727	181	25768	231	36361
32	50515	82	91381	132	12057	182	26007	232	36549
33	51851	83	91908	133	12385	183	26245	233	36736
34	53148	84	92428	134	12710	184	26482	234	36922
35	54407	85	92942	135	13033	185	26717	235	37107
36	55630	86	93450	136	13354	186	26951	236	37291
37	56820	87	93952	137	13672	187	27184	237	37475
38	57978	88	94448	138	13988	188	27416	238	37658
39	59106	89	94939	139	14301	189	27646	239	37840
40	60206	90	95424	140	14613	190	27875	240	38021
41	61278	91	95904	141	14922	191	28103	241	38202
42	62325	92	96379	142	15229	192	28330	242	38382
43	63347	93	96848	143	15534	193	28556	243	38561
44	64345	94	97313	144	15836	194	28780	244	38739
45	65321	95	97772	145	16137	195	29003	245	38917
46	66276	96	98227	146	16435	196	29226	246	39094
47	67210	97	98677	147	16732	197	29447	247	39270
48	68124	98	99123	148	17026	198	29667	248	39445
49	69020	99	99564	149	17319	199	29885	249	39620
50	69897	100	00000	150	17609	200	30103	250	39794

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
251	39967	301	47857	351	54531	401	60314	451	65418
252	40140	302	48001	352	54654	402	60423	452	65514
253	40312	303	48144	353	54777	403	60531	453	65610
254	40483	304	48287	354	54900	404	60638	454	65706
255	40654	305	48430	355	55023	405	60746	455	65801
256	40824	306	48572	356	55145	406	60853	456	65896
257	40993	307	48714	357	55267	407	60959	457	65992
258	41162	308	48855	358	55388	408	61066	458	66087
259	41330	309	48996	359	55509	409	61172	459	66181
260	41497	310	49136	360	55630	410	61278	460	66276
261	41664	311	49276	361	55751	411	61384	461	66370
262	41830	312	49415	362	55871	412	61490	462	66464
263	41996	313	49554	363	55991	413	61595	463	66558
264	42160	314	49693	364	56110	414	61700	464	66652
265	42325	315	49831	365	56229	415	61805	465	66745
266	42488	316	49969	366	56348	416	61909	466	66839
267	42651	317	50106	367	56467	417	62014	467	66932
268	42813	318	50243	368	56585	418	62118	468	67025
269	42975	319	50379	369	56703	419	62221	469	67117
270	43136	320	50515	370	56820	420	62325	470	67210
271	43297	321	50651	371	56937	421	62428	471	67302
272	43457	322	50786	372	57054	422	62531	472	67394
273	43616	323	50920	373	57171	423	62634	473	67486
274	43775	324	51055	374	57287	424	62737	474	67578
275	43933	325	51188	375	57403	425	62839	475	67669
276	44091	326	51322	376	57519	426	62941	476	67761
277	44248	327	51455	377	57634	427	63043	477	67852
278	44404	328	51587	378	57749	428	63144	478	67943
279	44560	329	51720	379	57864	429	63246	479	68034
280	44716	330	51851	380	57978	430	63347	480	68124
281	44871	331	51983	381	58092	431	63448	481	68215
282	45025	332	52114	382	58206	432	63548	482	68305
283	45179	333	52244	383	58320	433	63649	483	68395
284	45332	334	52375	384	58433	434	63749	484	68485
285	45484	335	52504	385	58546	435	63849	485	68574
286	45637	336	52634	386	58659	436	63949	486	68664
287	45788	337	52763	387	58771	437	64048	487	68753
288	45939	338	52892	388	58883	438	64147	488	68842
289	46090	339	53020	389	58995	439	64246	489	68931
290	46240	340	53148	390	59106	440	64345	490	69020
291	46389	341	53275	391	59218	441	64444	491	69108
292	46538	342	53403	392	59329	442	64542	492	69197
293	46687	343	53529	393	59439	443	64640	493	69285
294	46835	344	53656	394	59550	444	64738	494	69373
295	46982	345	53782	395	59660	445	64836	495	69461
296	47129	346	53908	396	59770	446	64933	496	69548
297	47276	347	54033	397	59879	447	65031	497	69636
298	47422	348	54158	398	59988	448	65128	498	69723
299	47567	349	54283	399	60097	449	65225	499	69810
300	47712	350	54407	400	60206	450	65321	500	69897

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
501	69984	551	74115	601	77887	651	81358	701	84572
502	70070	552	74194	602	77960	652	81425	702	84634
503	70157	553	74273	603	78032	653	81491	703	84696
504	70243	554	74351	604	78104	654	81558	704	84757
505	70329	555	74429	605	78176	655	81624	705	84819
506	70415	556	74507	606	78247	656	81690	706	84880
507	70501	557	74586	607	78319	657	81757	707	84942
508	70586	558	74663	608	78390	658	81823	708	85003
509	70672	559	74741	609	78462	659	81889	709	85065
510	70757	560	74819	610	78533	660	81954	710	85126
511	70842	561	74896	611	78604	661	82020	711	85187
512	70927	562	74974	612	78675	662	82086	712	85248
513	71012	563	75051	613	78746	663	82151	713	85309
514	71096	564	75128	614	78817	664	82217	714	85370
515	71181	565	75205	615	78888	665	82282	715	85431
516	71265	566	75282	616	78958	666	82347	716	85491
517	71349	567	75358	617	79029	667	82413	717	85552
518	71433	568	75435	618	79099	668	82478	718	85612
519	71517	569	75511	619	79169	669	82543	719	85673
520	71600	570	75587	620	79239	670	82607	720	85733
521	71684	571	75664	621	79309	671	82672	721	85794
522	71767	572	75740	622	79379	672	82737	722	85854
523	71850	573	75815	623	79449	673	82802	723	85914
524	71933	574	75891	624	79518	674	82866	724	85974
525	72016	575	75967	625	79588	675	82930	725	86034
526	72099	576	76042	626	79657	676	82995	726	86094
527	72181	577	76118	627	79727	677	83059	727	86153
528	72263	578	76193	628	79796	678	83123	728	86213
529	72346	579	76268	629	79865	679	83187	729	86273
530	72428	580	76343	630	79934	680	83251	730	86332
531	72509	581	76418	631	80003	681	83315	731	86392
532	72591	582	76492	632	80072	682	83378	732	86451
533	72673	583	76567	633	80140	683	83442	733	86510
534	72754	584	76641	634	80209	684	83506	734	86570
535	72835	585	76716	635	80277	685	83569	735	86629
536	72916	586	76790	636	80346	686	83632	736	86688
537	72997	587	76864	637	80414	687	83696	737	86747
538	73078	588	76938	638	80482	688	83759	738	86806
539	73159	589	77012	639	80550	689	83822	739	86864
540	73239	590	77085	640	80618	690	83885	740	86923
541	73320	591	77159	641	80686	691	83948	741	86982
542	73400	592	77232	642	80754	692	84011	742	87040
543	73480	593	77305	643	80821	693	84073	743	87099
544	73560	594	77379	644	80889	694	84136	744	87157
545	73640	595	77452	645	80956	695	84198	745	87216
546	73719	596	77525	646	81023	696	84261	746	87274
547	73799	597	77597	647	81090	697	84323	747	87332
548	73878	598	77670	648	81158	698	84386	748	87390
549	73957	599	77743	649	81224	699	84448	749	87448
550	74036	600	77815	650	81291	700	84510	750	87506

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
2251	35238	20	2301	36192	19	2351	37125	18	2401	38039	18	2451	38934	17
2252	35257	19	2302	36211	19	2352	37143	19	2402	38057	18	2452	38952	18
2253	35276	19	2303	36229	18	2353	37162	18	2403	38075	18	2453	38970	18
2254	35295	19	2304	36248	19	2354	37181	19	2404	38093	18	2454	38987	17
2255	35315	20	2305	36267	19	2355	37199	18	2405	38112	19	2455	39005	18
2256	35334	19	2306	36286	19	2356	37218	19	2406	38130	18	2456	39023	18
2257	35353	19	2307	36305	19	2357	37236	18	2407	38148	18	2457	39041	18
2258	35372	19	2308	36324	19	2358	37254	18	2408	38166	18	2458	39058	17
2259	35392	20	2309	36342	18	2359	37273	19	2409	38184	18	2459	39076	18
2260	35411	19	2310	36361	19	2360	37291	18	2410	38202	18	2460	39094	18
2261	35430	19	2311	36380	19	2361	37310	19	2411	38220	18	2461	39111	17
2262	35449	19	2312	36399	19	2362	37328	18	2412	38238	18	2462	39129	18
2263	35468	19	2313	36418	19	2363	37346	18	2413	38256	18	2463	39146	17
2264	35488	20	2314	36436	18	2364	37365	19	2414	38274	18	2464	39164	18
2265	35507	19	2315	36455	19	2365	37383	18	2415	38292	18	2465	39182	18
2266	35526	19	2316	36474	19	2366	37401	18	2416	38310	18	2466	39199	17
2267	35545	19	2317	36493	19	2367	37420	19	2417	38328	18	2467	39217	18
2268	35564	19	2318	36511	18	2368	37438	18	2418	38346	18	2468	39235	18
2269	35583	19	2319	36530	19	2369	37457	19	2419	38364	18	2469	39252	17
2270	35603	20	2320	36549	19	2370	37475	18	2420	38382	18	2470	39270	18
2271	35622	19	2321	36568	19	2371	37493	18	2421	38399	17	2471	39287	17
2272	35641	19	2322	36586	18	2372	37511	19	2422	38417	18	2472	39305	18
2273	35660	19	2323	36605	19	2373	37530	18	2423	38435	18	2473	39322	17
2274	35679	19	2324	36624	19	2374	37548	18	2424	38453	18	2474	39340	18
2275	35698	19	2325	36642	18	2375	37566	18	2425	38471	18	2475	39358	18
2276	35717	19	2326	36661	19	2376	37585	19	2426	38489	18	2476	39375	17
2277	35736	19	2327	36680	19	2377	37603	18	2427	38507	18	2477	39393	18
2278	35755	19	2328	36698	18	2378	37621	18	2428	38525	18	2478	39410	17
2279	35774	19	2329	36717	19	2379	37639	19	2429	38543	18	2479	39428	18
2280	35793	19	2330	36736	19	2380	37658	18	2430	38561	17	2480	39445	17
2281	35813	20	2331	36754	18	2381	37676	18	2431	38578	18	2481	39463	18
2282	35832	19	2332	36773	19	2382	37694	18	2432	38596	18	2482	39480	17
2283	35851	19	2333	36791	18	2383	37712	19	2433	38614	18	2483	39498	18
2284	35870	19	2334	36810	19	2384	37731	18	2434	38632	18	2484	39515	17
2285	35889	19	2335	36829	19	2385	37749	18	2435	38650	18	2485	39533	18
2286	35908	19	2336	36847	18	2386	37767	18	2436	38668	18	2486	39550	17
2287	35927	19	2337	36866	19	2387	37785	18	2437	38686	17	2487	39568	18
2288	35946	19	2338	36884	18	2388	37803	19	2438	38703	18	2488	39585	17
2289	35965	19	2339	36903	19	2389	37822	18	2439	38721	18	2489	39602	18
2290	35984	19	2340	36922	19	2390	37840	18	2440	38739	18	2490	39620	17
2291	36003	19	2341	36940	18	2391	37858	18	2441	38757	18	2491	39637	18
2292	36021	18	2342	36959	19	2392	37876	18	2442	38775	17	2492	39655	17
2293	36040	19	2343	36977	18	2393	37894	18	2443	38792	18	2493	39672	18
2294	36059	19	2344	36996	19	2394	37912	19	2444	38810	18	2494	39690	17
2295	36078	19	2345	37014	18	2395	37931	18	2445	38828	18	2495	39707	17
2296	36097	19	2346	37033	19	2396	37949	18	2446	38846	17	2496	39724	18
2297	36116	19	2347	37051	18	2397	37967	18	2447	38863	18	2497	39742	17
2298	36135	19	2348	37070	19	2398	37985	18	2448	38881	18	2498	39759	18
2299	36154	19	2349	37088	18	2399	38003	18	2449	38899	18	2499	39777	17
2300	36173	19	2350	37107	19	2400	38021	18	2450	38917	18	2500	39794	17

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
2501	39811	17	2551	40671	17	2601	41514	17	2651	42341	16	2701	43152	16
2502	39829	18	2552	40688	17	2602	41531	17	2652	42357	16	2702	43169	17
2503	39846	17	2553	40705	17	2603	41547	16	2653	42374	17	2703	43185	16
2504	39863	17	2554	40722	17	2604	41564	17	2654	42390	16	2704	43201	16
2505	39881	18	2555	40739	17	2605	41581	17	2655	42406	16	2705	43217	16
2506	39898	17	2556	40756	17	2606	41597	16	2656	42423	17	2706	43233	16
2507	39915	17	2557	40773	17	2607	41614	17	2657	42439	16	2707	43249	16
2508	39933	18	2558	40790	17	2608	41631	17	2658	42455	16	2708	43265	16
2509	39950	17	2559	40807	17	2609	41647	16	2659	42472	17	2709	43281	16
2510	39967	17	2560	40824	17	2610	41664	17	2660	42488	16	2710	43297	16
2511	39985	18	2561	40841	17	2611	41681	17	2661	42504	16	2711	43313	16
2512	40002	17	2562	40858	17	2612	41697	16	2662	42521	17	2712	43329	16
2513	40019	17	2563	40875	17	2613	41714	17	2663	42537	16	2713	43345	16
2514	40037	18	2564	40892	17	2614	41731	17	2664	42553	16	2714	43361	16
2515	40054	17	2565	40909	17	2615	41747	16	2665	42570	17	2715	43377	16
2516	40071	17	2566	40926	17	2616	41764	17	2666	42586	16	2716	43393	16
2517	40088	17	2567	40943	17	2617	41780	16	2667	42602	17	2717	43409	16
2518	40106	18	2568	40960	16	2618	41797	17	2668	42619	16	2718	43425	16
2519	40123	17	2569	40976	17	2619	41814	16	2669	42635	16	2719	43441	16
2520	40140	17	2570	40993	17	2620	41830	17	2670	42651	16	2720	43457	16
2521	40157	18	2571	41010	17	2621	41847	16	2671	42667	17	2721	43473	16
2522	40175	17	2572	41027	17	2622	41863	17	2672	42684	16	2722	43489	16
2523	40192	17	2573	41044	17	2623	41880	16	2673	42700	16	2723	43505	16
2524	40209	17	2574	41061	17	2624	41896	17	2674	42716	16	2724	43521	16
2525	40226	17	2575	41078	17	2625	41913	16	2675	42732	17	2725	43537	16
2526	40243	18	2576	41095	16	2626	41929	17	2676	42749	16	2726	43553	16
2527	40261	17	2577	41111	17	2627	41946	17	2677	42765	16	2727	43569	15
2528	40278	17	2578	41128	17	2628	41963	16	2678	42781	16	2728	43584	16
2529	40295	17	2579	41145	17	2629	41979	17	2679	42797	16	2729	43600	16
2530	40312	17	2580	41162	17	2630	41996	16	2680	42813	17	2730	43616	16
2531	40329	17	2581	41179	17	2631	42012	17	2681	42830	16	2731	43632	16
2532	40346	18	2582	41196	16	2632	42029	16	2682	42846	16	2732	43648	16
2533	40364	17	2583	41212	17	2633	42045	17	2683	42862	16	2733	43664	16
2534	40381	17	2584	41229	17	2634	42062	16	2684	42878	16	2734	43680	16
2535	40398	17	2585	41246	17	2635	42078	17	2685	42894	17	2735	43696	16
2536	40415	17	2586	41263	17	2636	42095	16	2686	42911	16	2736	43712	15
2537	40432	17	2587	41280	16	2637	42111	16	2687	42927	16	2737	43727	16
2538	40449	17	2588	41296	17	2638	42127	17	2688	42943	16	2738	43743	16
2539	40466	17	2589	41313	17	2639	42144	16	2689	42959	16	2739	43759	16
2540	40483	17	2590	41330	17	2640	42160	17	2690	42975	16	2740	43775	16
2541	40500	18	2591	41347	16	2641	42177	16	2691	42991	17	2741	43791	16
2542	40518	17	2592	41363	17	2642	42193	17	2692	43008	16	2742	43807	16
2543	40535	17	2593	41380	17	2643	42210	16	2693	43024	16	2743	43823	15
2544	40552	17	2594	41397	17	2644	42226	17	2694	43040	16	2744	43838	16
2545	40569	17	2595	41414	16	2645	42243	16	2695	43056	16	2745	43854	16
2546	40586	17	2596	41430	17	2646	42259	16	2696	43072	16	2746	43870	16
2547	40603	17	2597	41447	17	2647	42275	17	2697	43088	16	2747	43886	15
2548	40620	17	2598	41464	17	2648	42292	16	2698	43104	16	2748	43902	15
2549	40637	17	2599	41481	16	2649	42308	17	2699	43120	16	2749	43917	16
2550	40654	17	2600	41497		2650	42325		2700	43136		2750	43933	

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
1251	10972	35	1301	11426	34	1351	11866	33	1401	12294	31	1451	12697	30
1252	10976	34	1302	11430	33	1352	11868	32	1402	12297	31	1452	12699	30
1253	10980	35	1303	11433	32	1353	11870	32	1403	12300	31	1453	12702	30
1254	10983	35	1304	11436	34	1354	11873	32	1404	12303	30	1454	12705	29
1255	10986	34	1305	11439	33	1355	11875	32	1405	12306	30	1455	12708	30
1256	10990	35	1306	11442	33	1356	11878	32	1406	12309	31	1456	12711	30
1257	10994	34	1307	11446	34	1357	11881	32	1407	12312	31	1457	12714	30
1258	10998	34	1308	11449	33	1358	11884	32	1408	12316	31	1458	12717	30
1259	11003	35	1309	11452	33	1359	11886	32	1409	12319	31	1459	12720	30
1260	11007	34	1310	11455	33	1360	11889	32	1410	12322	31	1460	12723	29
1261	11011	35	1311	11460	33	1361	11892	32	1411	12325	30	1461	12726	30
1262	11016	34	1312	11463	33	1362	11895	32	1412	12328	31	1462	12729	30
1263	11020	34	1313	11466	33	1363	11898	32	1413	12331	31	1463	12732	30
1264	11025	35	1314	11469	34	1364	11901	31	1414	12334	31	1464	12735	30
1265	11029	34	1315	11473	33	1365	11904	32	1415	12337	31	1465	12738	30
1266	11033	34	1316	11476	33	1366	11907	32	1416	12340	30	1466	12741	29
1267	11038	35	1317	11479	33	1367	11910	32	1417	12343	31	1467	12744	30
1268	11042	34	1318	11482	32	1368	11913	32	1418	12346	31	1468	12747	30
1269	11046	34	1319	11486	33	1369	11916	31	1419	12349	30	1469	12750	30
1270	11050	34	1320	11489	33	1370	11919	32	1420	12352	31	1470	12753	30
1271	11055	35	1321	11492	33	1371	11922	32	1421	12355	30	1471	12756	29
1272	11059	34	1322	11495	33	1372	11925	31	1422	12358	31	1472	12759	30
1273	11063	34	1323	11498	32	1373	11928	32	1423	12361	31	1473	12762	30
1274	11067	34	1324	11502	33	1374	11931	32	1424	12364	31	1474	12765	30
1275	11071	34	1325	11505	33	1375	11934	31	1425	12367	30	1475	12768	29
1276	11076	35	1326	11508	32	1376	11937	32	1426	12370	31	1476	12771	30
1277	11080	34	1327	11511	33	1377	11940	31	1427	12373	30	1477	12774	29
1278	11084	34	1328	11514	33	1378	11943	32	1428	12376	31	1478	12777	30
1279	11088	34	1329	11517	32	1379	11946	31	1429	12379	30	1479	12780	29
1280	11092	34	1330	11520	33	1380	11949	32	1430	12382	31	1480	12783	30
1281	11096	34	1331	11524	32	1381	11952	31	1431	12385	30	1481	12786	29
1282	11100	34	1332	11527	33	1382	11955	32	1432	12388	31	1482	12789	29
1283	11104	34	1333	11530	33	1383	11958	31	1433	12391	30	1483	12792	29
1284	11108	34	1334	11533	32	1384	11961	32	1434	12394	30	1484	12795	30
1285	11112	34	1335	11536	33	1385	11964	31	1435	12397	30	1485	12798	29
1286	11116	34	1336	11539	32	1386	11967	31	1436	12400	31	1486	12801	29
1287	11120	34	1337	11542	33	1387	11970	32	1437	12403	30	1487	12804	29
1288	11124	33	1338	11546	32	1388	11973	31	1438	12406	30	1488	12807	29
1289	11128	34	1339	11549	32	1389	11976	31	1439	12409	30	1489	12810	30
1290	11132	34	1340	11552	33	1390	11979	32	1440	12412	30	1490	12813	29
1291	11136	33	1341	11555	32	1391	11982	31	1441	12415	31	1491	12816	29
1292	11140	34	1342	11558	33	1392	11985	31	1442	12418	30	1492	12819	29
1293	11144	33	1343	11561	32	1393	11988	31	1443	12421	30	1493	12822	29
1294	11148	34	1344	11564	32	1394	11991	31	1444	12424	30	1494	12825	29
1295	11152	34	1345	11567	33	1395	11994	32	1445	12427	30	1495	12828	29
1296	11156	33	1346	11570	32	1396	11997	31	1446	12430	30	1496	12831	29
1297	11160	33	1347	11573	32	1397	12000	31	1447	12433	30	1497	12834	29
1298	11164	34	1348	11576	32	1398	12003	31	1448	12436	30	1498	12837	29
1299	11168	33	1349	11579	32	1399	12006	31	1449	12439	30	1499	12840	29
1300	11172	33	1350	11582	32	1400	12009	31	1450	12442	30	1500	12843	29

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
1501	17638	29	1551	19061	28	1601	20439	27	1651	21775	27	1701	23070	25
1502	17667	29	1552	19089	28	1602	20466	27	1652	21801	26	1702	23096	26
1503	17696	29	1553	19117	28	1603	20493	27	1653	21827	26	1703	23121	25
1504	17725	29	1554	19145	28	1604	20520	27	1654	21854	27	1704	23147	26
1505	17754	29	1555	19173	28	1605	20548	28	1655	21880	26	1705	23172	25
1506	17782	28	1556	19201	28	1606	20575	27	1656	21906	26	1706	23198	26
1507	17811	29	1557	19229	28	1607	20602	27	1657	21932	26	1707	23223	25
1508	17840	29	1558	19257	28	1608	20629	27	1658	21958	26	1708	23249	26
1509	17869	29	1559	19285	28	1609	20656	27	1659	21985	27	1709	23274	25
1510	17898	29	1560	19312	27	1610	20683	27	1660	22011	26	1710	23300	26
1511	17926	28	1561	19340	28	1611	20710	27	1661	22037	26	1711	23326	25
1512	17955	29	1562	19368	28	1612	20737	27	1662	22063	26	1712	23350	25
1513	17984	29	1563	19396	28	1613	20763	26	1663	22089	26	1713	23376	26
1514	18013	29	1564	19424	28	1614	20790	27	1664	22115	26	1714	23401	25
1515	18041	28	1565	19451	27	1615	20817	27	1665	22141	26	1715	23426	25
1516	18070	29	1566	19479	28	1616	20844	27	1666	22167	26	1716	23452	26
1517	18099	29	1567	19507	28	1617	20871	27	1667	22194	27	1717	23477	25
1518	18127	28	1568	19535	28	1618	20898	27	1668	22220	26	1718	23502	25
1519	18156	29	1569	19562	27	1619	20925	27	1669	22246	26	1719	23528	26
1520	18184	28	1570	19590	28	1620	20952	27	1670	22272	26	1720	23553	25
1521	18213	29	1571	19618	28	1621	20978	26	1671	22298	26	1721	23578	25
1522	18241	28	1572	19645	27	1622	21005	27	1672	22324	26	1722	23603	25
1523	18270	29	1573	19673	28	1623	21032	27	1673	22350	26	1723	23629	26
1524	18298	28	1574	19700	27	1624	21059	27	1674	22376	26	1724	23654	25
1525	18327	29	1575	19728	28	1625	21085	26	1675	22401	25	1725	23679	25
1526	18355	28	1576	19756	28	1626	21112	27	1676	22427	26	1726	23704	25
1527	18384	29	1577	19783	27	1627	21139	27	1677	22453	26	1727	23729	25
1528	18412	28	1578	19811	28	1628	21165	26	1678	22479	26	1728	23754	25
1529	18441	29	1579	19838	27	1629	21192	27	1679	22505	26	1729	23779	26
1530	18469	28	1580	19866	28	1630	21219	27	1680	22531	26	1730	23805	25
1531	18498	29	1581	19893	27	1631	21245	26	1681	22557	26	1731	23830	25
1532	18526	28	1582	19921	28	1632	21272	27	1682	22583	26	1732	23855	25
1533	18554	28	1583	19948	27	1633	21299	27	1683	22608	25	1733	23880	25
1534	18583	29	1584	19976	28	1634	21325	26	1684	22634	26	1734	23905	25
1535	18611	28	1585	20003	27	1635	21352	27	1685	22660	26	1735	23930	25
1536	18639	28	1586	20030	27	1636	21378	26	1686	22686	26	1736	23955	25
1537	18667	28	1587	20058	28	1637	21405	27	1687	22712	26	1737	23980	25
1538	18696	29	1588	20085	27	1638	21431	26	1688	22737	25	1738	24005	25
1539	18724	28	1589	20112	27	1639	21458	27	1689	22763	26	1739	24030	25
1540	18752	28	1590	20140	28	1640	21484	26	1690	22789	26	1740	24055	25
1541	18780	28	1591	20167	27	1641	21511	27	1691	22814	25	1741	24080	25
1542	18808	28	1592	20194	27	1642	21537	26	1692	22840	26	1742	24105	25
1543	18837	29	1593	20222	28	1643	21564	27	1693	22866	26	1743	24130	25
1544	18865	28	1594	20249	27	1644	21590	26	1694	22891	25	1744	24155	25
1545	18893	28	1595	20276	27	1645	21617	27	1695	22917	26	1745	24180	25
1546	18921	28	1596	20303	27	1646	21643	26	1696	22943	26	1746	24204	24
1547	18949	28	1597	20330	27	1647	21669	26	1697	22968	25	1747	24229	25
1548	18977	28	1598	20358	28	1648	21696	27	1698	22994	26	1748	24254	25
1549	19005	28	1599	20385	27	1649	21722	26	1699	23019	25	1749	24279	25
1550	19033	28	1600	20412	27	1650	21748	26	1700	23045	26	1750	24304	25

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
3251	51202	14	3301	51865	14	3351	52517	13	3401	53161	13	3451	53794	12
3252	51215	13	3302	51878	13	3352	52530	13	3402	53173	12	3452	53807	13
3253	51228	13	3303	51891	13	3353	52543	13	3403	53186	13	3453	53820	13
3254	51242	14	3304	51904	13	3354	52556	13	3404	53199	13	3454	53832	12
3255	51255	13	3305	51917	13	3355	52569	13	3405	53212	13	3455	53845	13
3256	51268	13	3306	51930	13	3356	52582	13	3406	53224	12	3456	53857	12
3257	51282	14	3307	51943	13	3357	52595	13	3407	53237	13	3457	53870	13
3258	51295	13	3308	51957	14	3358	52608	13	3408	53250	13	3458	53882	12
3259	51308	13	3309	51970	13	3359	52621	13	3409	53263	13	3459	53895	13
3260	51322	14	3310	51983	13	3360	52634	13	3410	53275	12	3460	53908	13
3261	51335	13	3311	51996	13	3361	52647	13	3411	53288	13	3461	53920	12
3262	51348	13	3312	52009	13	3362	52660	13	3412	53301	13	3462	53933	13
3263	51362	14	3313	52022	13	3363	52673	13	3413	53314	13	3463	53946	12
3264	51375	13	3314	52035	13	3364	52686	13	3414	53326	12	3464	53958	13
3265	51388	13	3315	52048	13	3365	52699	13	3415	53339	13	3465	53970	12
3266	51402	14	3316	52061	13	3366	52711	12	3416	53352	13	3466	53983	13
3267	51415	13	3317	52075	14	3367	52724	13	3417	53364	12	3467	53995	12
3268	51428	13	3318	52088	13	3368	52737	13	3418	53377	13	3468	54008	13
3269	51441	13	3319	52101	13	3369	52750	13	3419	53390	13	3469	54020	12
3270	51455	14	3320	52114	13	3370	52763	13	3420	53403	13	3470	54033	13
3271	51468	13	3321	52127	13	3371	52776	13	3421	53415	12	3471	54045	12
3272	51481	13	3322	52140	13	3372	52789	13	3422	53428	13	3472	54058	13
3273	51495	14	3323	52153	13	3373	52802	13	3423	53441	13	3473	54070	12
3274	51508	13	3324	52166	13	3374	52815	13	3424	53453	12	3474	54083	13
3275	51521	13	3325	52179	13	3375	52827	12	3425	53466	13	3475	54095	12
3276	51534	13	3326	52192	13	3376	52840	13	3426	53479	13	3476	54108	13
3277	51548	14	3327	52205	13	3377	52853	13	3427	53491	12	3477	54120	12
3278	51561	13	3328	52218	13	3378	52866	13	3428	53504	13	3478	54133	13
3279	51574	13	3329	52231	13	3379	52879	13	3429	53517	13	3479	54145	12
3280	51587	13	3330	52244	13	3380	52892	13	3430	53529	12	3480	54158	13
3281	51601	14	3331	52257	13	3381	52905	13	3431	53542	13	3481	54170	12
3282	51614	13	3332	52270	13	3382	52917	12	3432	53555	13	3482	54183	13
3283	51627	13	3333	52284	14	3383	52930	13	3433	53567	12	3483	54195	12
3284	51640	13	3334	52297	13	3384	52943	13	3434	53580	13	3484	54208	13
3285	51654	14	3335	52310	13	3385	52956	13	3435	53593	13	3485	54220	12
3286	51667	13	3336	52323	13	3386	52969	13	3436	53605	12	3486	54233	13
3287	51680	13	3337	52336	13	3387	52982	13	3437	53618	13	3487	54245	12
3288	51693	13	3338	52349	13	3388	52994	12	3438	53631	13	3488	54258	13
3289	51706	13	3339	52362	13	3389	53007	13	3439	53643	12	3489	54270	12
3290	51720	14	3340	52375	13	3390	53020	13	3440	53656	13	3490	54283	13
3291	51733	13	3341	52388	13	3391	53033	13	3441	53668	12	3491	54295	12
3292	51746	13	3342	52401	13	3392	53046	12	3442	53681	13	3492	54307	12
3293	51759	13	3343	52414	13	3393	53058	13	3443	53694	13	3493	54320	13
3294	51772	13	3344	52427	13	3394	53071	13	3444	53706	12	3494	54332	12
3295	51786	14	3345	52440	13	3395	53084	13	3445	53719	13	3495	54345	13
3296	51799	13	3346	52453	13	3396	53097	13	3446	53732	13	3496	54357	12
3297	51812	13	3347	52466	13	3397	53110	12	3447	53744	12	3497	54370	13
3298	51825	13	3348	52479	13	3398	53122	13	3448	53757	13	3498	54382	12
3299	51838	13	3349	52492	12	3399	53135	13	3449	53769	12	3499	54394	13
3300	51851		3350	52504		3400	53148		3450	53782	13	3500	54407	

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
3501	54419	12	3551	55035	12	3601	55642	12	3651	56241	12	3701	56832	12
3502	54432	13	3552	55047	12	3602	55654	12	3652	56253	12	3702	56844	12
3503	54444	12	3553	55060	13	3603	55666	12	3653	56265	12	3703	56855	11
3504	54456	12	3554	55072	12	3604	55678	12	3654	56277	12	3704	56867	12
3505	54469	13	3555	55084	12	3605	55691	13	3655	56289	12	3705	56879	12
3506	54481	12	3556	55096	12	3606	55703	12	3656	56301	12	3706	56891	12
3507	54494	13	3557	55108	12	3607	55715	12	3657	56312	11	3707	56902	11
3508	54506	12	3558	55121	13	3608	55727	12	3658	56324	12	3708	56914	12
3509	54518	12	3559	55133	12	3609	55739	12	3659	56336	12	3709	56926	12
3510	54531	13	3560	55145	12	3610	55751	12	3660	56348	12	3710	56937	11
3511	54543	12	3561	55157	12	3611	55763	12	3661	56360	12	3711	56949	12
3512	54555	12	3562	55169	12	3612	55775	12	3662	56372	12	3712	56961	12
3513	54568	13	3563	55182	13	3613	55787	12	3663	56384	12	3713	56972	11
3514	54580	12	3564	55194	12	3614	55799	12	3664	56396	12	3714	56984	12
3515	54593	13	3565	55206	12	3615	55811	12	3665	56407	11	3715	56996	12
3516	54605	12	3566	55218	12	3616	55823	12	3666	56419	12	3716	57008	12
3517	54617	12	3567	55230	12	3617	55835	12	3667	56431	12	3717	57019	11
3518	54630	13	3568	55242	12	3618	55847	12	3668	56443	12	3718	57031	12
3519	54642	12	3569	55255	13	3619	55859	12	3669	56455	12	3719	57043	12
3520	54654	12	3570	55267	12	3620	55871	12	3670	56467	12	3720	57054	11
3521	54667	13	3571	55279	12	3621	55883	12	3671	56478	11	3721	57066	12
3522	54679	12	3572	55291	12	3622	55895	12	3672	56490	12	3722	57078	12
3523	54691	12	3573	55303	12	3623	55907	12	3673	56502	12	3723	57089	11
3524	54704	13	3574	55315	12	3624	55919	12	3674	56514	12	3724	57101	12
3525	54716	12	3575	55328	12	3625	55931	12	3675	56526	12	3725	57113	12
3526	54728	12	3576	55340	12	3626	55943	12	3676	56538	12	3726	57124	11
3527	54741	13	3577	55352	12	3627	55955	12	3677	56549	11	3727	57136	12
3528	54753	12	3578	55364	12	3628	55967	12	3678	56561	12	3728	57148	12
3529	54765	12	3579	55376	12	3629	55979	12	3679	56573	12	3729	57159	11
3530	54777	12	3580	55388	12	3630	55991	12	3680	56585	12	3730	57171	12
3531	54790	13	3581	55400	12	3631	56003	12	3681	56597	12	3731	57183	12
3532	54802	12	3582	55413	13	3632	56015	12	3682	56608	11	3732	57194	11
3533	54814	12	3583	55425	12	3633	56027	12	3683	56620	12	3733	57206	12
3534	54827	13	3584	55437	12	3634	56038	11	3684	56632	12	3734	57217	11
3535	54839	12	3585	55449	12	3635	56050	12	3685	56644	12	3735	57229	12
3536	54851	12	3586	55461	12	3636	56062	12	3686	56656	12	3736	57241	12
3537	54864	13	3587	55473	12	3637	56074	12	3687	56667	11	3737	57252	11
3538	54876	12	3588	55485	12	3638	56086	12	3688	56679	12	3738	57264	12
3539	54888	12	3589	55497	12	3639	56098	12	3689	56691	12	3739	57276	12
3540	54900	12	3590	55509	12	3640	56110	12	3690	56703	12	3740	57287	11
3541	54913	13	3591	55522	13	3641	56122	12	3691	56714	11	3741	57299	12
3542	54925	12	3592	55534	12	3642	56134	12	3692	56726	12	3742	57310	11
3543	54937	12	3593	55546	12	3643	56146	12	3693	56738	12	3743	57322	12
3544	54949	12	3594	55558	12	3644	56158	12	3694	56750	12	3744	57334	12
3545	54962	13	3595	55570	12	3645	56170	12	3695	56761	11	3745	57345	11
3546	54974	12	3596	55582	12	3646	56182	12	3696	56773	12	3746	57357	12
3547	54986	12	3597	55594	12	3647	56194	12	3697	56785	12	3747	57368	11
3548	54998	12	3598	55606	12	3648	56205	11	3698	56797	12	3748	57380	12
3549	55011	13	3599	55618	12	3649	56217	12	3699	56808	11	3749	57392	12
3550	55023	12	3600	55630	12	3650	56229	12	3700	56820	12	3750	57403	11

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
3751	57415	12	3801	57990	12	3851	58557	11	3901	59118	12	3951	59671	11
3752	57426	11	3802	58001	11	3852	58569	12	3902	59129	11	3952	59682	11
3753	57438	12	3803	58013	12	3853	58580	11	3903	59140	11	3953	59693	11
3754	57449	11	3804	58024	11	3854	58591	11	3904	59151	11	3954	59704	11
3755	57461	12	3805	58035	11	3855	58602	11	3905	59162	11	3955	59715	11
3756	57473	12	3806	58047	12	3856	58614	12	3906	59173	11	3956	59726	11
3757	57484	11	3807	58058	11	3857	58625	11	3907	59184	11	3957	59737	11
3758	57496	12	3808	58070	12	3858	58636	11	3908	59195	11	3958	59748	11
3759	57507	11	3809	58081	11	3859	58647	11	3909	59207	12	3959	59759	11
3760	57519	12	3810	58092	11	3860	58659	12	3910	59218	11	3960	59770	11
3761	57530	11	3811	58104	12	3861	58670	11	3911	59229	11	3961	59780	10
3762	57542	12	3812	58115	11	3862	58681	11	3912	59240	11	3962	59791	11
3763	57553	11	3813	58127	12	3863	58692	11	3913	59251	11	3963	59802	11
3764	57565	12	3814	58138	11	3864	58704	12	3914	59262	11	3964	59813	11
3765	57576	11	3815	58149	11	3865	58715	11	3915	59273	11	3965	59824	11
3766	57588	12	3816	58161	12	3866	58726	11	3916	59284	11	3966	59835	11
3767	57600	12	3817	58172	11	3867	58737	11	3917	59295	11	3967	59846	11
3768	57611	11	3818	58184	12	3868	58749	12	3918	59306	11	3968	59857	11
3769	57623	12	3819	58195	11	3869	58760	11	3919	59318	12	3969	59868	11
3770	57634	11	3820	58206	11	3870	58771	11	3920	59329	11	3970	59879	11
3771	57646	12	3821	58218	12	3871	58782	11	3921	59340	11	3971	59890	11
3772	57657	11	3822	58229	11	3872	58794	12	3922	59351	11	3972	59901	11
3773	57669	12	3823	58240	11	3873	58805	11	3923	59362	11	3973	59912	11
3774	57680	11	3824	58252	12	3874	58816	11	3924	59373	11	3974	59923	11
3775	57692	12	3825	58263	11	3875	58827	11	3925	59384	11	3975	59934	11
3776	57703	11	3826	58274	11	3876	58838	11	3926	59395	11	3976	59945	11
3777	57715	12	3827	58286	12	3877	58850	12	3927	59406	11	3977	59956	10
3778	57726	11	3828	58297	11	3878	58861	11	3928	59417	11	3978	59966	11
3779	57738	12	3829	58309	12	3879	58872	11	3929	59428	11	3979	59977	11
3780	57749	11	3830	58320	11	3880	58883	11	3930	59439	11	3980	59988	11
3781	57761	12	3831	58331	11	3881	58894	11	3931	59450	11	3981	59999	11
3782	57772	11	3832	58343	12	3882	58906	12	3932	59461	11	3982	60010	11
3783	57784	12	3833	58354	11	3883	58917	11	3933	59472	11	3983	60021	11
3784	57795	11	3834	58365	11	3884	58928	11	3934	59483	11	3984	60032	11
3785	57807	12	3835	58377	12	3885	58939	11	3935	59494	11	3985	60043	11
3786	57818	11	3836	58388	11	3886	58950	11	3936	59506	12	3986	60054	11
3787	57830	12	3837	58399	11	3887	58961	11	3937	59517	11	3987	60065	11
3788	57841	11	3838	58410	11	3888	58973	12	3938	59528	11	3988	60076	11
3789	57852	11	3839	58422	12	3889	58984	11	3939	59539	11	3989	60086	10
3790	57864	12	3840	58433	11	3890	58995	11	3940	59550	11	3990	60097	11
3791	57875	11	3841	58444	11	3891	59006	11	3941	59561	11	3991	60108	11
3792	57887	12	3842	58456	12	3892	59017	11	3942	59572	11	3992	60119	11
3793	57898	11	3843	58467	11	3893	59028	11	3943	59583	11	3993	60130	11
3794	57910	12	3844	58478	11	3894	59040	12	3944	59594	11	3994	60141	11
3795	57921	11	3845	58490	12	3895	59051	11	3945	59605	11	3995	60152	11
3796	57933	12	3846	58501	11	3896	59062	11	3946	59616	11	3996	60163	11
3797	57944	11	3847	58512	11	3897	59073	11	3947	59627	11	3997	60173	10
3798	57955	11	3848	58524	12	3898	59084	11	3948	59638	11	3998	60184	11
3799	57967	12	3849	58535	11	3899	59095	11	3949	59649	11	3999	60195	11
3800	57978	11	3850	58546	11	3900	59106	11	3950	59660	11	4000	60206	11

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
4001	60217	11	4051	60756	10	4101	61289	11	4151	61815	10	4201	62335	10
4002	60228	11	4052	60767	11	4102	61300	11	4152	61826	11	4202	62346	11
4003	60239	11	4053	60778	11	4103	61310	10	4153	61836	10	4203	62356	10
4004	60249	10	4054	60788	10	4104	61321	11	4154	61847	11	4204	62366	10
4005	60260	11	4055	60799	11	4105	61331	10	4155	61857	10	4205	62377	11
4006	60271	11	4056	60810	11	4106	61342	11	4156	61868	11	4206	62387	10
4007	60282	11	4057	60821	11	4107	61352	10	4157	61878	10	4207	62397	10
4008	60293	11	4058	60831	10	4108	61363	11	4158	61888	10	4208	62408	11
4009	60304	11	4059	60842	11	4109	61374	11	4159	61899	11	4209	62418	10
4010	60314	10	4060	60853	11	4110	61384	10	4160	61909	10	4210	62428	10
4011	60325	11	4061	60863	10	4111	61395	11	4161	61920	11	4211	62439	11
4012	60336	11	4062	60874	11	4112	61405	10	4162	61930	10	4212	62449	10
4013	60347	11	4063	60885	11	4113	61416	11	4163	61941	11	4213	62459	10
4014	60358	11	4064	60895	10	4114	61426	10	4164	61951	10	4214	62469	10
4015	60369	11	4065	60906	11	4115	61437	11	4165	61962	11	4215	62480	11
4016	60379	10	4066	60917	11	4116	61448	11	4166	61972	10	4216	62490	10
4017	60390	11	4067	60927	10	4117	61458	10	4167	61982	10	4217	62500	10
4018	60401	11	4068	60938	11	4118	61469	11	4168	61993	11	4218	62511	11
4019	60412	11	4069	60949	11	4119	61479	10	4169	62003	10	4219	62521	10
4020	60423	11	4070	60959	10	4120	61490	11	4170	62014	11	4220	62531	10
4021	60433	10	4071	60970	11	4121	61500	10	4171	62024	10	4221	62542	11
4022	60444	11	4072	60981	11	4122	61511	11	4172	62034	10	4222	62552	10
4023	60455	11	4073	60991	10	4123	61521	10	4173	62045	11	4223	62562	10
4024	60466	11	4074	61002	11	4124	61532	11	4174	62055	10	4224	62572	10
4025	60477	11	4075	61013	11	4125	61542	10	4175	62066	11	4225	62583	11
4026	60487	10	4076	61023	10	4126	61553	11	4176	62076	10	4226	62593	10
4027	60498	11	4077	61034	11	4127	61563	10	4177	62086	10	4227	62603	10
4028	60509	11	4078	61045	11	4128	61574	11	4178	62097	11	4228	62613	10
4029	60520	11	4079	61055	10	4129	61584	10	4179	62207	10	4229	62624	11
4030	60531	11	4080	61066	11	4130	61595	11	4180	62118	11	4230	62634	10
4031	60541	10	4081	61077	11	4131	61606	11	4181	62128	10	4231	62644	10
4032	60552	11	4082	61087	10	4132	61616	10	4182	62138	10	4232	62655	11
4033	60563	11	4083	61098	11	4133	61627	11	4183	62149	11	4233	62665	10
4034	60574	11	4084	61109	11	4134	61637	10	4184	62159	10	4234	62675	10
4035	60584	10	4085	61119	10	4135	61648	11	4185	62170	11	4235	62685	10
4036	60595	11	4086	61130	11	4136	61658	10	4186	62180	10	4236	62696	11
4037	60606	11	4087	61140	10	4137	61669	11	4187	62190	10	4237	62706	10
4038	60617	11	4088	61151	11	4138	61679	10	4188	62201	11	4238	62716	10
4039	60627	10	4089	61162	11	4139	61690	11	4189	62211	10	4239	62726	10
4040	60638	11	4090	61172	10	4140	61700	10	4190	62221	10	4240	62737	11
4041	60649	11	4091	61183	11	4141	61711	11	4191	62232	11	4241	62747	10
4042	60660	11	4092	61194	11	4142	61721	10	4192	62242	10	4242	62757	10
4043	60670	10	4093	61204	10	4143	61731	10	4193	62252	10	4243	62767	10
4044	60681	11	4094	61215	11	4144	61742	11	4194	62263	11	4244	62778	11
4045	60692	11	4095	61225	10	4145	61752	10	4195	62273	10	4245	62788	10
4046	60703	11	4096	61236	11	4146	61763	11	4196	62284	11	4246	62798	10
4047	60713	10	4097	61247	11	4147	61773	10	4197	62294	10	4247	62808	10
4048	60724	11	4098	61257	10	4148	61784	11	4198	62304	10	4248	62818	10
4049	60735	11	4099	61268	11	4149	61794	10	4199	62315	11	4249	62829	11
4050	60746	11	4100	61278	10	4150	61805	11	4200	62325	10	4250	62839	10

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
4251	62849	10	4301	63357	10	4351	63859	10	4401	64355	10	4451	64846	10
4252	62859	10	4302	63367	10	4352	63869	10	4402	64365	10	4452	64856	10
4253	62870	11	4303	63377	10	4353	63879	10	4403	64375	10	4453	64865	9
4254	62880	10	4304	63387	10	4354	63889	10	4404	64385	10	4454	64875	10
4255	62890	10	4305	63397	10	4355	63899	10	4405	64395	10	4455	64885	10
		10			10			10			9			10
4256	62900	10	4306	63407	10	4356	63909	10	4406	64404	10	4456	64895	9
4257	62910	11	4307	63417	11	4357	63919	10	4407	64414	10	4457	64904	10
4258	62921	10	4308	63428	10	4358	63929	10	4408	64424	10	4458	64914	10
4259	62931	10	4309	63438	10	4359	63939	10	4409	64434	10	4459	64924	9
4260	62941	10	4310	63448	10	4360	63949	10	4410	64444	10	4460	64933	10
		10			10			10			10			10
4261	62951	10	4311	63458	10	4361	63959	10	4411	64454	10	4461	64943	10
4262	62961	11	4312	63468	10	4362	63969	10	4412	64464	9	4462	64953	10
4263	62972	11	4313	63478	10	4363	63979	9	4413	64473	10	4463	64963	9
4264	62982	10	4314	63488	10	4364	63988	10	4414	64483	10	4464	64972	10
4265	62992	10	4315	63498	10	4365	63998	10	4415	64493	10	4465	64982	10
		10			10			10			10			10
4266	63002	10	4316	63508	10	4366	64008	10	4416	64503	10	4466	64992	10
4267	63012	10	4317	63518	10	4367	64018	10	4417	64513	10	4467	65002	9
4268	63022	11	4318	63528	10	4368	64028	10	4418	64523	9	4468	65011	10
4269	63033	10	4319	63538	10	4369	64038	10	4419	64532	10	4469	65021	10
4270	63043	10	4320	63548	10	4370	64048	10	4420	64542	10	4470	65031	9
		10			10			10			10			10
4271	63053	10	4321	63558	10	4371	64058	10	4421	64552	10	4471	65040	10
4272	63063	10	4322	63568	11	4372	64068	10	4422	64562	10	4472	65050	10
4273	63073	10	4323	63579	10	4373	64078	10	4423	64572	10	4473	65060	10
4274	63083	11	4324	63589	10	4374	64088	10	4424	64582	9	4474	65070	9
4275	63094	10	4325	63599	10	4375	64098	10	4425	64591	10	4475	65079	10
		10			10			10			10			10
4276	63104	10	4326	63609	10	4376	64108	10	4426	64601	10	4476	65089	10
4277	63114	10	4327	63619	10	4377	64118	10	4427	64611	10	4477	65099	9
4278	63124	10	4328	63629	10	4378	64128	9	4428	64621	10	4478	65108	10
4279	63134	10	4329	63639	10	4379	64137	10	4429	64631	9	4479	65118	10
4280	63144	10	4330	63649	10	4380	64147	10	4430	64640	10	4480	65128	9
		11			10			10			10			10
4281	63155	10	4331	63659	10	4381	64157	10	4431	64650	10	4481	65137	10
4282	63165	10	4332	63669	10	4382	64167	10	4432	64660	10	4482	65147	10
4283	63175	10	4333	63679	10	4383	64177	10	4433	64670	10	4483	65157	10
4284	63185	10	4334	63689	10	4384	64187	10	4434	64680	9	4484	65167	9
4285	63195	10	4335	63699	10	4385	64197	10	4435	64689	10	4485	65176	10
		10			10			10			10			10
4286	63205	10	4336	63709	10	4386	64207	10	4436	64699	10	4486	65186	10
4287	63215	10	4337	63719	10	4387	64217	10	4437	64709	10	4487	65196	9
4288	63225	10	4338	63729	10	4388	64227	10	4438	64719	10	4488	65205	10
4289	63236	10	4339	63739	10	4389	64237	9	4439	64729	9	4489	65215	10
4290	63246	10	4340	63749	10	4390	64246	10	4440	64738	10	4490	65225	9
		10			10			10			10			10
4291	63256	10	4341	63759	10	4391	64256	10	4441	64748	10	4491	65234	10
4292	63266	10	4342	63769	10	4392	64266	10	4442	64758	10	4492	65244	10
4293	63276	10	4343	63779	10	4393	64276	10	4443	64768	9	4493	65254	8
4294	63286	10	4344	63789	10	4394	64286	10	4444	64777	10	4494	65263	10
4295	63296	10	4345	63799	10	4395	64296	10	4445	64787	10	4495	65273	10
		10			10			10			10			10
4296	63306	11	4346	63809	10	4396	64306	10	4446	64797	10	4496	65283	9
4297	63317	10	4347	63819	10	4397	64316	10	4447	64807	9	4497	65292	10
4298	63327	10	4348	63829	10	4398	64326	9	4448	64816	10	4498	65302	10
4299	63337	10	4349	63839	10	4399	64335	10	4449	64826	10	4499	65312	9
4300	63347	10	4350	63849	10	4400	64345	10	4450	64836	10	4500	65321	9

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
4501	65331	10	4551	65811	10	4601	66285	9	4651	66755	10	4701	67219	9
4502	65341	10	4552	65820	9	4602	66295	10	4652	66764	9	4702	67228	9
4503	65350	9	4553	65830	10	4603	66304	9	4653	66773	9	4703	67237	9
4504	65360	10	4554	65839	9	4604	66314	10	4654	66783	10	4704	67247	10
4505	65369	9	4555	65849	10	4605	66323	9	4655	66792	9	4705	67256	9
4506	65379	10	4556	65858	9	4606	66332	9	4656	66801	9	4706	67265	9
4507	65389	10	4557	65868	10	4607	66342	10	4657	66811	10	4707	67274	9
4508	65398	9	4558	65877	9	4608	66351	9	4658	66820	9	4708	67284	10
4509	65408	10	4559	65887	10	4609	66361	10	4659	66829	9	4709	67293	9
4510	65418	10	4560	65896	9	4610	66370	9	4660	66839	10	4710	67302	9
4511	65427	9	4561	65906	10	4611	66380	10	4661	66848	9	4711	67311	9
4512	65437	10	4562	65916	10	4612	66389	9	4662	66857	9	4712	67321	10
4513	65447	10	4563	65925	9	4613	66398	9	4663	66867	10	4713	67330	9
4514	65456	9	4564	65935	10	4614	66408	10	4664	66876	9	4714	67339	9
4515	65466	10	4565	65944	9	4615	66417	9	4665	66885	9	4715	67348	9
4516	65475	9	4566	65954	10	4616	66427	10	4666	66894	9	4716	67357	9
4517	65485	10	4567	65963	9	4617	66436	9	4667	66904	10	4717	67367	10
4518	65495	10	4568	65973	10	4618	66445	9	4668	66913	9	4718	673-6	9
4519	65504	9	4569	65982	9	4619	66455	10	4669	66922	9	4719	67385	9
4520	65514	10	4570	65992	10	4620	66464	9	4670	66932	10	4720	67394	9
4521	65523	9	4571	66001	9	4621	66474	10	4671	66941	9	4721	67403	9
4522	65533	10	4572	66011	10	4622	66483	9	4672	66950	9	4722	67413	10
4523	65543	10	4573	66020	9	4623	66492	9	4673	66960	10	4723	67422	9
4524	65552	9	4574	66030	10	4624	66502	10	4674	66969	9	4724	67431	9
4525	65562	10	4575	66039	9	4625	66511	9	4675	66978	9	4725	67440	9
4526	65571	9	4576	66049	10	4626	66521	10	4676	66987	9	4726	67449	9
4527	65581	10	4577	66058	9	4627	66530	9	4677	66997	10	4727	67459	10
4528	65591	10	4578	66068	10	4628	66539	9	4678	67006	9	4728	67468	9
4529	65600	9	4579	66077	9	4629	66549	10	4679	67015	9	4729	67477	9
4530	65610	10	4580	66087	10	4630	66558	9	4680	67025	10	4730	67486	9
4531	65619	9	4581	66096	9	4631	66567	9	4681	67034	9	4731	67495	9
4532	65629	10	4582	66106	10	4632	66577	10	4682	67043	9	4732	67504	9
4533	65639	10	4583	66115	9	4633	66586	9	4683	67052	9	4733	67514	10
4534	65648	9	4584	66124	9	4634	66596	10	4684	67062	10	4734	67523	9
4535	65658	10	4585	66134	10	4635	66605	9	4685	67071	9	4735	67532	9
4536	65667	9	4586	66143	9	4636	66614	9	4686	67080	9	4736	67541	9
4537	65677	10	4587	66153	10	4637	66624	10	4687	67089	9	4737	67550	9
4538	65686	9	4588	66162	9	4638	66633	9	4688	67099	10	4738	67560	10
4539	65696	10	4589	66172	10	4639	66642	9	4689	67108	9	4739	67569	9
4540	65706	10	4590	66181	9	4640	66652	10	4690	67117	9	4740	67578	9
4541	65715	9	4591	66191	10	4641	66661	9	4691	67127	10	4741	67587	9
4542	65725	10	4592	66200	9	4642	66671	10	4692	67136	9	4742	67596	9
4543	65734	9	4593	66210	10	4643	66680	9	4693	67145	9	4743	67605	9
4544	65744	10	4594	66219	9	4644	66689	9	4694	67154	9	4744	67614	9
4545	65753	9	4595	66229	10	4645	66699	10	4695	67164	10	4745	67624	10
4546	65763	10	4596	66238	9	4646	66708	9	4696	67173	9	4746	67633	9
4547	65772	9	4597	66247	9	4647	66717	9	4697	67182	9	4747	67642	9
4548	65782	10	4598	66257	10	4648	66727	10	4698	67191	9	4748	67651	9
4549	65792	10	4599	66266	9	4649	66736	9	4699	67201	10	4749	67660	9
4550	65801	9	4600	66276	10	4650	66745	9	4700	67210	9	4750	67669	9

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
3251	51202	14	3301	51865	14	3351	52517	13	3401	53161	13	3451	53794	12
3252	51215	13	3302	51878	13	3352	52530	13	3402	53173	12	3452	53807	13
3253	51228	13	3303	51891	13	3353	52543	13	3403	53186	13	3453	53820	13
3254	51242	14	3304	51904	13	3354	52556	13	3404	53199	13	3454	53832	12
3255	51255	13	3305	51917	13	3355	52569	13	3405	53212	13	3455	53845	13
3256	51268	13	3306	51930	13	3356	52582	13	3406	53224	12	3456	53857	12
3257	51282	14	3307	51943	13	3357	52595	13	3407	53237	13	3457	53870	13
3258	51295	13	3308	51957	14	3358	52608	13	3408	53250	13	3458	53882	12
3259	51308	13	3309	51970	13	3359	52621	13	3409	53263	13	3459	53895	13
3260	51322	14	3310	51983	13	3360	52634	13	3410	53275	12	3460	53908	13
3261	51335	13	3311	51996	13	3361	52647	13	3411	53288	13	3461	53920	12
3262	51348	13	3312	52009	13	3362	52660	13	3412	53301	13	3462	53933	13
3263	51362	14	3313	52022	13	3363	52673	13	3413	53314	13	3463	53945	12
3264	51375	13	3314	52035	13	3364	52686	13	3414	53326	12	3464	53958	13
3265	51388	13	3315	52048	13	3365	52699	13	3415	53339	13	3465	53970	12
3266	51402	14	3316	52061	13	3366	52711	12	3416	53352	13	3466	53983	13
3267	51415	13	3317	52075	14	3367	52724	13	3417	53364	12	3467	53995	12
3268	51428	13	3318	52088	13	3368	52737	13	3418	53377	13	3468	54008	13
3269	51441	13	3319	52101	13	3369	52750	13	3419	53390	13	3469	54020	12
3270	51455	14	3320	52114	13	3370	52763	13	3420	53403	13	3470	54033	13
3271	51468	13	3321	52127	13	3371	52776	13	3421	53415	12	3471	54045	12
3272	51481	13	3322	52140	13	3372	52789	13	3422	53428	13	3472	54058	13
3273	51495	14	3323	52153	13	3373	52802	13	3423	53441	13	3473	54070	12
3274	51508	13	3324	52166	13	3374	52815	13	3424	53453	12	3474	54083	13
3275	51521	13	3325	52179	13	3375	52827	12	3425	53466	13	3475	54095	12
3276	51534	13	3326	52192	13	3376	52840	13	3426	53479	13	3476	54108	13
3277	51548	14	3327	52205	13	3377	52853	13	3427	53491	12	3477	54120	12
3278	51561	13	3328	52218	13	3378	52866	13	3428	53504	13	3478	54133	13
3279	51574	13	3329	52231	13	3379	52879	13	3429	53517	13	3479	54145	12
3280	51587	13	3330	52244	13	3380	52892	13	3430	53529	12	3480	54158	13
3281	51601	14	3331	52257	13	3381	52905	13	3431	53542	12	3481	54170	12
3282	51614	13	3332	52270	13	3382	52917	12	3432	53555	13	3482	54183	13
3283	51627	13	3333	52284	14	3383	52930	13	3433	53567	12	3483	54195	12
3284	51640	13	3334	52297	13	3384	52943	13	3434	53580	13	3484	54208	13
3285	51654	14	3335	52310	13	3385	52956	13	3435	53593	13	3485	54220	12
3286	51667	13	3336	52323	13	3386	52969	13	3436	53605	12	3486	54233	13
3287	51680	13	3337	52336	13	3387	52982	13	3437	53618	13	3487	54245	12
3288	51693	13	3338	52349	13	3388	52994	12	3438	53631	13	3488	54258	13
3289	51706	13	3339	52362	13	3389	53007	13	3439	53643	12	3489	54270	12
3290	51720	14	3340	52375	13	3390	53020	13	3440	53656	13	3490	54283	13
3291	51733	13	3341	52388	13	3391	53033	13	3441	53668	12	3491	54295	12
3292	51746	13	3342	52401	13	3392	53046	12	3442	53681	13	3492	54307	12
3293	51759	13	3343	52414	13	3393	53058	13	3443	53694	13	3493	54320	13
3294	51772	13	3344	52427	13	3394	53071	13	3444	53706	12	3494	54332	12
3295	51786	14	3345	52440	13	3395	53084	13	3445	53719	13	3495	54345	13
3296	51799	13	3346	52453	13	3396	53097	13	3446	53732	13	3496	54357	12
3297	51812	13	3347	52466	13	3397	53110	12	3447	53744	12	3497	54370	13
3298	51825	13	3348	52479	13	3398	53122	13	3448	53757	13	3498	54382	12
3299	51838	13	3349	52492	12	3399	53135	13	3449	53769	12	3499	54394	13
3300	51851	13	3350	52504	13	3400	53148	13	3450	53782	13	3500	54407	13

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
3501	54419	12	3551	55035	12	3601	55642	12	3651	56241	12	3701	56832	12
3502	54432	13	3552	55047	12	3602	55654	12	3652	56253	12	3702	56844	12
3503	54444	12	3553	55060	13	3603	55666	12	3653	56265	12	3703	56855	11
3504	54456	12	3554	55072	12	3604	55678	12	3654	56277	12	3704	56867	12
3505	54469	13	3555	55084	12	3605	55691	13	3655	56289	12	3705	56879	12
3506	54481	12	3556	55096	12	3606	55703	12	3656	56301	12	3706	56891	12
3507	54494	13	3557	55108	12	3607	55715	12	3657	56312	11	3707	56902	11
3508	54506	12	3558	55121	13	3608	55727	12	3658	56324	12	3708	56914	12
3509	54518	12	3559	55133	12	3609	55739	12	3659	56336	12	3709	56926	12
3510	54531	13	3560	55145	12	3610	55751	12	3660	56348	12	3710	56937	11
3511	54543	12	3561	55157	12	3611	55763	12	3661	56360	12	3711	56949	12
3512	54555	12	3562	55169	12	3612	55775	12	3662	56372	12	3712	56961	12
3513	54568	13	3563	55182	13	3613	55787	12	3663	56384	12	3713	56972	11
3514	54580	12	3564	55194	12	3614	55799	12	3664	56396	12	3714	56984	12
3515	54593	13	3565	55206	12	3615	55811	12	3665	56407	11	3715	56996	12
3516	54605	12	3566	55218	12	3616	55823	12	3666	56419	12	3716	57008	12
3517	54617	12	3567	55230	12	3617	55835	12	3667	56431	12	3717	57019	11
3518	54630	13	3568	55242	12	3618	55847	12	3668	56443	12	3718	57031	12
3519	54642	12	3569	55255	13	3619	55859	12	3669	56455	12	3719	57043	12
3520	54654	12	3570	55267	12	3620	55871	12	3670	56467	12	3720	57054	11
3521	54667	13	3571	55279	12	3621	55883	12	3671	56478	11	3721	57066	12
3522	54679	12	3572	55291	12	3622	55895	12	3672	56490	12	3722	57078	12
3523	54691	12	3573	55303	12	3623	55907	12	3673	56502	12	3723	57089	11
3524	54704	13	3574	55315	12	3624	55919	12	3674	56514	12	3724	57101	12
3525	54716	12	3575	55328	12	3625	55931	12	3675	56526	12	3725	57113	12
3526	54728	12	3576	55340	12	3626	55943	12	3676	56538	12	3726	57124	11
3527	54741	13	3577	55352	12	3627	55955	12	3677	56549	11	3727	57136	12
3528	54753	12	3578	55364	12	3628	55967	12	3678	56561	12	3728	57148	12
3529	54765	12	3579	55376	12	3629	55979	12	3679	56573	12	3729	57159	11
3530	54777	12	3580	55388	12	3630	55991	12	3680	56585	12	3730	57171	12
3531	54790	13	3581	55400	12	3631	56003	12	3681	56597	12	3731	57183	12
3532	54802	12	3582	55413	13	3632	56015	12	3682	56608	11	3732	57194	11
3533	54814	12	3583	55425	12	3633	56027	12	3683	56620	12	3733	57206	12
3534	54827	13	3584	55437	12	3634	56038	11	3684	56632	12	3734	57217	11
3535	54839	12	3585	55449	12	3635	56050	12	3685	56644	12	3735	57229	12
3536	54851	12	3586	55461	12	3636	56062	12	3686	56656	12	3736	57241	12
3537	54864	13	3587	55473	12	3637	56074	12	3687	56667	11	3737	57252	11
3538	54876	12	3588	55485	12	3638	56086	12	3688	56679	12	3738	57264	12
3539	54888	12	3589	55497	12	3639	56098	12	3689	56691	12	3739	57276	12
3540	54900	12	3590	55509	12	3640	56110	12	3690	56703	12	3740	57287	11
3541	54913	13	3591	55522	13	3641	56122	12	3691	56714	11	3741	57299	12
3542	54925	12	3592	55534	12	3642	56134	12	3692	56726	12	3742	57310	11
3543	54937	12	3593	55546	12	3643	56146	12	3693	56738	12	3743	57322	12
3544	54949	12	3594	55558	12	3644	56158	12	3694	56750	12	3744	57334	12
3545	54962	13	3595	55570	12	3645	56170	12	3695	56761	11	3745	57345	11
3546	54974	12	3596	55582	12	3646	56182	12	3696	56773	12	3746	57357	12
3547	54986	12	3597	55594	12	3647	56194	12	3697	56785	12	3747	57368	11
3548	54998	12	3598	55606	12	3648	56205	11	3698	56797	12	3748	57380	12
3549	55011	13	3599	55618	12	3649	56217	12	3699	56808	11	3749	57392	12
3550	55023	12	3600	55630	12	3650	56229	12	3700	56820	12	3750	57403	11

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
5251	72024	8	5301	72436	8	5351	72843	8	5401	73247	8	5451	73648	8
5252	72032	8	5302	72444	8	5352	72852	9	5402	73255	8	5452	73656	8
5253	72041	9	5303	72452	8	5353	72860	8	5403	73263	8	5453	73664	8
5254	72049	8	5304	72460	8	5354	72868	8	5404	73272	9	5454	73672	8
5255	72057	8	5305	72469	9	5355	72876	8	5405	73280	8	5455	73679	7
5256	72066	9	5306	72477	8	5356	72884	8	5406	73288	8	5456	73687	8
5257	72074	8	5307	72485	8	5357	72892	8	5407	73296	8	5457	73695	8
5258	72082	8	5308	72493	8	5358	72900	8	5408	73304	8	5458	73703	8
5259	72090	8	5309	72501	8	5359	72908	8	5409	73312	8	5459	73711	8
5260	72099	9	5310	72509	8	5360	72916	9	5410	73320	8	5460	73719	8
5261	72107	8	5311	72518	9	5361	72925	8	5411	73328	8	5461	73727	8
5262	72115	8	5312	72526	8	5362	72933	8	5412	73336	8	5462	73735	8
5263	72123	8	5313	72534	8	5363	72941	8	5413	73344	8	5463	73743	8
5264	72132	9	5314	72542	8	5364	72949	8	5414	73352	8	5464	73751	8
5265	72140	8	5315	72550	8	5365	72957	8	5415	73360	8	5465	73759	8
5266	72148	8	5316	72558	8	5366	72965	8	5416	73368	8	5466	73767	8
5267	72156	8	5317	72567	9	5367	72973	8	5417	73376	8	5467	73775	8
5268	72165	9	5318	72575	8	5368	72981	8	5418	73384	8	5468	73783	8
5269	72173	8	5319	72583	8	5369	72989	8	5419	73392	8	5469	73791	8
5270	72181	8	5320	72591	8	5370	72997	8	5420	73400	8	5470	73799	8
5271	72189	8	5321	72599	8	5371	73006	9	5421	73408	8	5471	73807	8
5272	72198	9	5322	72607	8	5372	73014	8	5422	73416	8	5472	73815	8
5273	72206	8	5323	72616	9	5373	73022	8	5423	73424	8	5473	73823	8
5274	72214	8	5324	72624	8	5374	73030	8	5424	73432	8	5474	73830	7
5275	72222	8	5325	72632	8	5375	73038	8	5425	73440	8	5475	73838	8
5276	72230	8	5326	72640	8	5376	73046	8	5426	73448	8	5476	73846	8
5277	72239	9	5327	72648	8	5377	73054	8	5427	73456	8	5477	73854	8
5278	72247	8	5328	72656	9	5378	73062	8	5428	73464	8	5478	73862	8
5279	72255	8	5329	72665	8	5379	73070	8	5429	73472	8	5479	73870	8
5280	72263	8	5330	72673	8	5380	73078	8	5430	73480	8	5480	73878	8
5281	72272	9	5331	72681	8	5381	73086	8	5431	73488	8	5481	73886	8
5282	72280	8	5332	72689	8	5382	73094	8	5432	73496	8	5482	73894	8
5283	72288	8	5333	72697	8	5383	73102	8	5433	73504	8	5483	73902	8
5284	72296	8	5334	72705	8	5384	73111	9	5434	73512	8	5484	73910	8
5285	72304	8	5335	72713	8	5385	73119	8	5435	73520	8	5485	73918	8
5286	72313	9	5336	72722	8	5386	73127	8	5436	73528	8	5486	73926	7
5287	72321	8	5337	72730	8	5387	73135	8	5437	73536	8	5487	73933	8
5288	72329	8	5338	72738	8	5388	73143	8	5438	73544	8	5488	73941	8
5289	72337	8	5339	72746	8	5389	73151	8	5439	73552	8	5489	73949	8
5290	72346	9	5340	72754	8	5390	73159	8	5440	73560	8	5490	73957	8
5291	72354	8	5341	72762	8	5391	73167	8	5441	73568	8	5491	73965	8
5292	72362	8	5342	72770	8	5392	73175	8	5442	73576	8	5492	73973	8
5293	72370	8	5343	72779	9	5393	73183	8	5443	73584	8	5493	73981	8
5294	72378	8	5344	72787	8	5394	73191	8	5444	73592	8	5494	73989	8
5295	72387	9	5345	72795	8	5395	73199	8	5445	73600	8	5495	73997	8
5296	72395	8	5346	72803	8	5396	73207	8	5446	73608	8	5496	74005	8
5297	72403	8	5347	72811	8	5397	73215	8	5447	73616	8	5497	74013	7
5298	72411	8	5348	72819	8	5398	73223	8	5448	73624	8	5498	74020	8
5299	72419	8	5349	72827	8	5399	73231	8	5449	73632	8	5499	74028	8
5300	72428	9	5350	72835		5400	73239		5450	73640		5500	74036	

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
5501	74044	8	5551	74437	8	5601	74827	8	5651	75213	8	5701	75595	8
5502	74052	8	5552	74445	8	5602	74834	7	5652	75220	7	5702	75603	8
5503	74060	8	5553	74453	8	5603	74842	8	5653	75228	8	5703	75610	7
5504	74068	8	5554	74461	8	5604	74850	8	5654	75236	8	5704	75618	8
5505	74076	8	5555	74468	7	5605	74858	8	5655	75243	7	5705	75626	8
5506	74084	8	5556	74476	8	5606	74865	7	5656	75251	8	5706	75633	7
5507	74092	8	5557	74484	8	5607	74873	8	5657	75259	8	5707	75641	8
5508	74099	7	5558	74492	8	5608	74881	8	5658	75266	7	5708	75648	7
5509	74107	8	5559	74500	8	5609	74889	8	5659	75274	8	5709	75656	8
5510	74115	8	5560	74507	7	5610	74896	7	5660	75282	8	5710	75664	8
5511	74123	8	5561	74515	8	5611	74904	8	5661	75289	7	5711	75671	7
5512	74131	8	5562	74523	8	5612	74912	8	5662	75297	8	5712	75679	8
5513	74139	8	5563	74531	8	5613	74920	8	5663	75305	8	5713	75686	7
5514	74147	8	5564	74539	8	5614	74927	7	5664	75312	7	5714	75694	8
5515	74155	8	5565	74547	8	5615	74935	8	5665	75320	8	5715	75702	8
5516	74162	7	5566	74554	7	5616	74943	8	5666	75328	8	5716	75709	7
5517	74170	8	5567	74562	8	5617	74950	7	5667	75335	7	5717	75717	8
5518	74178	8	5568	74570	8	5618	74958	8	5668	75343	8	5718	75724	7
5519	74186	8	5569	74578	8	5619	74966	8	5669	75351	8	5719	75732	8
5520	74194	8	5570	74586	8	5620	74974	8	5670	75358	7	5720	75740	8
5521	74202	8	5571	74593	7	5621	74981	7	5671	75366	8	5721	75747	7
5522	74210	8	5572	74601	8	5622	74989	8	5672	75374	8	5722	75755	8
5523	74218	8	5573	74609	8	5623	74997	8	5673	75381	7	5723	75762	7
5524	74225	7	5574	74617	8	5624	75005	8	5674	75389	8	5724	75770	8
5525	74233	8	5575	74624	7	5625	75012	7	5675	75397	8	5725	75778	8
5526	74241	8	5576	74632	8	5626	75020	8	5676	75404	7	5726	75785	7
5527	74249	8	5577	74640	8	5627	75028	8	5677	75412	8	5727	75793	8
5528	74257	8	5578	74648	8	5628	75035	7	5678	75420	8	5728	75800	7
5529	74265	8	5579	74656	8	5629	75043	8	5679	75427	7	5729	75808	8
5530	74273	8	5580	74663	7	5630	75051	8	5680	75435	8	5730	75815	7
5531	74280	7	5581	74671	8	5631	75059	8	5681	75442	7	5731	75823	8
5532	74288	8	5582	74679	8	5632	75066	7	5682	75450	8	5732	75831	8
5533	74296	8	5583	74687	8	5633	75074	8	5683	75458	8	5733	75838	7
5534	74304	8	5584	74695	8	5634	75082	8	5684	75465	7	5734	75846	8
5535	74312	8	5585	74702	7	5635	75089	7	5685	75473	8	5735	75853	7
5536	74320	8	5586	74710	8	5636	75097	8	5686	75481	8	5736	75861	8
5537	74327	7	5587	74718	8	5637	75105	8	5687	75488	7	5737	75868	7
5538	74335	8	5588	74726	8	5638	75113	8	5688	75496	8	5738	75876	8
5539	74343	8	5589	74733	7	5639	75120	7	5689	75504	8	5739	75884	8
5540	74351	8	5590	74741	8	5640	75128	8	5690	75511	7	5740	75891	7
5541	74359	8	5591	74749	8	5641	75136	8	5691	75519	8	5741	75899	8
5542	74367	8	5592	74757	8	5642	75143	7	5692	75526	7	5742	75906	7
5543	74374	7	5593	74764	7	5643	75151	8	5693	75534	8	5743	75914	8
5544	74382	8	5594	74772	8	5644	75159	8	5694	75542	8	5744	75921	7
5545	74390	8	5595	74780	8	5645	75166	7	5695	75549	7	5745	75929	8
5546	74398	8	5596	74788	8	5646	75174	8	5696	75557	8	5746	75937	8
5547	74406	8	5597	74796	8	5647	75182	8	5697	75565	8	5747	75944	7
5548	74414	8	5598	74803	7	5648	75189	7	5698	75572	7	5748	75952	8
5549	74421	7	5599	74811	8	5649	75197	8	5699	75580	8	5749	75959	7
5550	74429	8	5600	74819	8	5650	75205	8	5700	75587	7	5750	75967	8

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
5751	75974	7	5801	76350	7	5851	76723	7	5901	77093	8	5951	77459	7
5752	75982	8	5802	76358	8	5852	76730	7	5902	77100	7	5952	77466	7
5753	75989	7	5803	76365	7	5853	76738	8	5903	77107	7	5953	77474	8
5754	75997	8	5804	76373	8	5854	76745	7	5904	77115	8	5954	77481	7
5755	76005	8	5805	76380	7	5855	76753	8	5905	77122	7	5955	77488	7
5756	76012	7	5806	76388	8	5856	76760	7	5906	77129	7	5956	77495	7
5757	76020	8	5807	76395	7	5857	76768	8	5907	77137	8	5957	77503	8
5758	76027	7	5808	76403	8	5858	76775	7	5908	77144	7	5958	77510	7
5759	76035	8	5809	76410	7	5859	76782	7	5909	77151	7	5959	77517	7
5760	76042	7	5810	76418	8	5860	76790	8	5910	77159	8	5960	77525	8
5761	76050	8	5811	76425	7	5861	76797	7	5911	77166	7	5961	77532	7
5762	76057	7	5812	76433	8	5862	76805	8	5912	77173	7	5962	77539	7
5763	76065	8	5813	76440	7	5863	76812	7	5913	77181	8	5963	77546	7
5764	76072	7	5814	76448	8	5864	76819	7	5914	77188	7	5964	77554	8
5765	76080	8	5815	76455	7	5865	76827	8	5915	77195	7	5965	77561	7
5766	76087	7	5816	76462	7	5866	76834	7	5916	77203	8	5966	77568	7
5767	76095	8	5817	76470	8	5867	76842	8	5917	77210	7	5967	77576	8
5768	76103	8	5818	76477	7	5868	76849	7	5918	77217	7	5968	77583	7
5769	76110	7	5819	76485	8	5869	76856	7	5919	77225	8	5969	77590	7
5770	76118	8	5820	76492	7	5870	76864	8	5920	77232	7	5970	77597	7
5771	76125	7	5821	76500	8	5871	76871	7	5921	77240	8	5971	77605	8
5772	76133	8	5822	76507	7	5872	76879	8	5922	77247	7	5972	77612	7
5773	76140	7	5823	76515	8	5873	76886	7	5923	77254	7	5973	77619	7
5774	76148	8	5824	76522	7	5874	76893	7	5924	77262	8	5974	77627	8
5775	76155	7	5825	76530	8	5875	76901	8	5925	77269	7	5975	77634	7
5776	76163	8	5826	76537	7	5876	76908	7	5926	77276	7	5976	77641	7
5777	76170	7	5827	76545	8	5877	76916	8	5927	77283	7	5977	77648	7
5778	76178	8	5828	76552	7	5878	76923	7	5928	77291	8	5978	77656	8
5779	76185	7	5829	76559	7	5879	76930	7	5929	77298	7	5979	77663	7
5780	76193	8	5830	76567	8	5880	76938	8	5930	77305	7	5980	77670	7
5781	76200	7	5831	76574	7	5881	76945	7	5931	77313	8	5981	77677	7
5782	76208	8	5832	76582	8	5882	76953	8	5932	77320	7	5982	77685	8
5783	76215	7	5833	76589	7	5883	76960	7	5933	77327	7	5983	77692	7
5784	76223	8	5834	76597	8	5884	76967	7	5934	77335	8	5984	77699	7
5785	76230	7	5835	76604	7	5885	76975	8	5935	77342	7	5985	77706	7
5786	76238	8	5836	76612	8	5886	76982	7	5936	77349	7	5986	77714	8
5787	76245	7	5837	76619	7	5887	76989	7	5937	77357	8	5987	77721	7
5788	76253	8	5838	76626	7	5888	76997	8	5938	77364	7	5988	77728	7
5789	76260	7	5839	76634	8	5889	77004	7	5939	77371	7	5989	77735	7
5790	76268	8	5840	76641	7	5890	77012	8	5940	77379	8	5990	77743	8
5791	76275	7	5841	76649	8	5891	77019	7	5941	77386	7	5991	77750	7
5792	76283	8	5842	76656	7	5892	77026	7	5942	77393	7	5992	77757	7
5793	76290	7	5843	76664	8	5893	77034	8	5943	77401	8	5993	77764	7
5794	76298	8	5844	76671	7	5894	77041	7	5944	77408	7	5994	77772	8
5795	76305	7	5845	76678	7	5895	77048	7	5945	77415	7	5995	77779	7
5796	76313	8	5846	76686	8	5896	77056	8	5946	77422	7	5996	77786	7
5797	76320	7	5847	76693	7	5897	77063	7	5947	77430	8	5997	77793	7
5798	76328	8	5848	76701	8	5898	77070	7	5948	77437	7	5998	77801	8
5799	76335	7	5849	76708	7	5899	77078	8	5949	77444	7	5999	77808	7
5800	76343	8	5850	76716	8	5900	77085	7	5950	77452	8	6000	77815	7

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N	Log.	D
6001	77822	7	6051	78183	7	6101	78540	7	6151	78895	7	6201	79246	7
6002	77830	8	6052	78190	7	6102	78547	7	6152	78902	7	6202	79253	7
6003	77837	7	6053	78197	7	6103	78554	7	6153	78909	7	6203	79260	7
6004	77844	7	6054	78204	7	6104	78561	7	6154	78916	7	6204	79267	7
6005	77851	7	6055	78211	7	6105	78569	8	6155	78923	7	6205	79274	7
6006	77859	8	6056	78219	8	6106	78576	7	6156	78930	7	6206	79281	7
6007	77866	7	6057	78226	7	6107	78583	7	6157	78937	7	6207	79288	7
6008	77873	7	6058	78233	7	6108	78590	7	6158	78944	7	6208	79295	7
6009	77880	7	6059	78240	7	6109	78597	7	6159	78951	7	6209	79302	7
6010	77887	7	6060	78247	7	6110	78604	7	6160	78958	7	6210	79309	7
6011	77895	8	6061	78254	7	6111	78611	7	6161	78965	7	6211	79316	7
6012	77902	7	6062	78262	8	6112	78618	7	6162	78972	7	6212	79323	7
6013	77909	7	6063	78269	7	6113	78625	7	6163	78979	7	6213	79330	7
6014	77916	7	6064	78276	7	6114	78633	8	6164	78986	7	6214	79337	7
6015	77924	8	6065	78283	7	6115	78640	7	6165	78993	7	6215	79344	7
6016	77931	7	6066	78290	7	6116	78647	7	6166	79000	7	6216	79351	7
6017	77938	7	6067	78297	7	6117	78654	7	6167	79007	7	6217	79358	7
6018	77945	7	6068	78305	8	6118	78661	7	6168	79014	7	6218	79365	7
6019	77952	7	6069	78312	7	6119	78668	7	6169	79021	7	6219	79372	7
6020	77960	8	6070	78319	7	6120	78675	7	6170	79029	8	6220	79379	7
6021	77967	7	6071	78326	7	6121	78682	7	6171	79036	7	6221	79386	7
6022	77974	7	6072	78333	7	6122	78689	7	6172	79043	7	6222	79393	7
6023	77981	7	6073	78340	7	6123	78696	7	6173	79050	7	6223	79400	7
6024	77988	7	6074	78347	7	6124	78704	8	6174	79057	7	6224	79407	7
6025	77996	8	6075	78355	8	6125	78711	7	6175	79064	7	6225	79414	7
6026	78003	7	6076	78362	7	6126	78718	7	6176	79071	7	6226	79421	7
6027	78010	7	6077	78369	7	6127	78725	7	6177	79078	7	6227	79428	7
6028	78017	7	6078	78376	7	6128	78732	7	6178	79085	7	6228	79435	7
6029	78025	8	6079	78383	7	6129	78739	7	6179	79092	7	6229	79442	7
6030	78032	7	6080	78390	7	6130	78746	7	6180	79099	7	6230	79449	7
6031	78039	7	6081	78398	8	6131	78753	7	6181	79106	7	6231	79456	7
6032	78046	7	6082	78405	7	6132	78760	7	6182	79113	7	6232	79463	7
6033	78053	7	6083	78412	7	6133	78767	7	6183	79120	7	6233	79470	7
6034	78061	8	6084	78419	7	6134	78774	7	6184	79127	7	6234	79477	7
6035	78068	7	6085	78426	7	6135	78781	7	6185	79134	7	6235	79484	7
6036	78075	7	6086	78433	7	6136	78789	8	6186	79141	7	6236	79491	7
6037	78082	7	6087	78440	7	6137	78796	7	6187	79148	7	6237	79498	7
6038	78089	7	6088	78447	7	6138	78803	7	6188	79155	7	6238	79505	7
6039	78097	8	6089	78455	8	6139	78810	7	6189	79162	7	6239	79511	6
6040	78104	7	6090	78462	7	6140	78817	7	6190	79169	7	6240	79518	7
6041	78111	7	6091	78469	7	6141	78824	7	6191	79176	7	6241	79525	7
6042	78118	7	6092	78476	7	6142	78831	7	6192	79183	7	6242	79532	7
6043	78125	7	6093	78483	7	6143	78838	7	6193	79190	7	6243	79539	7
6044	78132	7	6094	78490	7	6144	78845	7	6194	79197	7	6244	79546	7
6045	78140	8	6095	78497	7	6145	78852	7	6195	79204	7	6245	79553	7
6046	78147	7	6096	78504	7	6146	78859	7	6196	79211	7	6246	79560	7
6047	78154	7	6097	78512	8	6147	78866	7	6197	79218	7	6247	79567	7
6048	78161	7	6098	78519	7	6148	78873	7	6198	79225	7	6248	79574	7
6049	78168	7	6099	78526	7	6149	78880	7	6199	79232	7	6249	79581	7
6050	78176	8	6100	78533	7	6150	78888	8	6200	79239	7	6250	79588	7

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
4751	67679	10	4801	68133	9	4851	68583	9	4901	69028	8	4951	69469	8
4752	67688	9	4802	68142	9	4852	68592	9	4902	69037	9	4952	69478	9
4753	67697	9	4803	68151	9	4853	68601	9	4903	69046	9	4953	69487	9
4754	67706	9	4804	68160	9	4854	68610	9	4904	69055	9	4954	69496	9
4755	67715	9	4805	68169	9	4855	68619	9	4905	69064	9	4955	69504	8
4756	67724	9	4806	68178	9	4856	68628	9	4906	69073	9	4956	69513	9
4757	67733	9	4807	68187	9	4857	68637	9	4907	69082	9	4957	69522	9
4758	67742	9	4808	68196	9	4858	68646	9	4908	69090	8	4958	69531	9
4759	67752	10	4809	68205	9	4859	68655	9	4909	69099	9	4959	69539	8
4760	67761	9	4810	68215	10	4860	68664	9	4910	69108	9	4960	69548	9
4761	67770	9	4811	68224	9	4861	686-3	9	4911	69117	9	4961	69557	9
4762	67779	9	4812	68233	9	4862	68681	8	4912	69126	9	4962	69566	9
4763	67788	9	4813	68242	9	4863	68690	9	4913	69135	9	4963	69574	8
4764	67797	9	4814	68251	9	4864	68699	9	4914	69144	9	4964	69583	9
4765	67806	9	4815	68260	9	4865	68708	9	4915	69152	8	4965	69592	9
4766	67815	9	4816	68269	9	4866	68717	9	4916	69161	9	4966	69601	9
4767	67825	10	4817	68278	9	4867	68726	9	4917	69170	9	4967	69609	8
4768	67834	9	4818	68287	9	4868	68735	9	4918	69179	9	4968	69618	9
4769	67843	9	4819	68296	9	4869	68744	9	4919	69188	9	4969	69627	9
4770	67852	9	4820	68305	9	4870	68753	9	4920	69197	9	4970	69636	9
4771	67861	9	4821	68314	9	4871	68762	9	4921	69205	8	4971	69644	8
4772	67870	9	4822	68323	9	4872	68771	9	4922	69214	9	4972	69653	9
4773	67879	9	4823	68332	9	4873	68780	9	4923	69223	9	4973	69662	9
4774	67888	9	4824	68341	9	4874	68789	9	4924	69232	9	4974	69671	9
4775	67897	9	4825	68350	9	4875	68797	8	4925	69241	9	4975	69679	8
4776	67906	9	4826	68359	9	4876	68806	9	4926	69249	8	4976	69688	9
4777	67916	10	4827	68368	9	4877	68815	9	4927	69258	9	4977	69697	9
4778	67925	9	4828	68377	9	4878	68824	9	4928	69267	9	4978	69705	8
4779	67934	9	4829	68386	9	4879	68833	9	4929	69276	9	4979	69714	9
4780	67943	9	4830	68395	9	4880	68842	9	4930	69285	9	4980	69723	9
4781	67952	9	4831	68404	9	4881	68851	9	4931	69294	9	4981	69732	9
4782	67961	9	4832	68413	9	4882	68860	9	4932	69302	8	4982	69740	8
4783	67970	9	4833	68422	9	4883	68869	9	4933	69311	9	4983	69749	9
4784	67979	9	4834	68431	9	4884	68878	9	4934	69320	9	4984	69758	9
4785	67988	9	4835	68440	9	4885	68886	8	4935	69329	9	4985	69767	9
4786	67997	9	4836	68449	9	4886	68895	9	4936	69338	9	4986	69775	8
4787	68006	9	4837	68458	9	4887	68904	9	4937	69346	8	4987	69784	9
4788	68015	9	4838	68467	9	4888	68913	9	4938	69355	9	4988	69793	9
4789	68024	9	4839	68476	9	4889	68922	9	4939	69364	9	4989	69801	8
4790	68034	10	4840	68485	9	4890	68931	9	4940	69373	9	4990	69810	9
4791	68043	9	4841	68494	9	4891	68940	9	4941	69381	8	4991	69819	9
4792	68052	9	4842	68502	8	4892	68949	9	4942	69390	9	4992	69827	8
4793	68061	9	4843	68511	9	4893	68958	9	4943	69399	9	4993	69836	9
4794	68070	9	4844	68520	9	4894	68966	8	4944	69408	9	4994	69845	9
4795	68079	9	4845	68529	9	4895	68975	9	4945	69417	9	4995	69854	9
4796	68088	9	4846	68538	9	4896	68984	9	4946	69425	8	4996	69862	9
4797	68097	9	4847	68547	9	4897	68993	9	4947	69434	9	4997	69871	9
4798	68106	9	4848	68556	9	4898	69002	9	4948	69443	9	4998	69880	8
4799	68115	9	4849	68565	9	4899	69011	9	4949	69452	9	4999	69888	9
4800	68124	9	4850	68574	9	4900	69020	9	4950	69461	9	5000	69897	9

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
5001	69906	9	5051	70338	9	5101	70766	9	5151	71189	8	5201	71609	9
5002	69914	8	5052	70346	8	5102	70774	9	5152	71198	9	5202	71617	8
5003	69923	9	5053	70355	9	5103	70783	8	5153	71206	8	5203	71625	8
5004	69932	9	5054	70364	9	5104	70791	9	5154	71214	8	5204	71634	9
5005	69940	8	5055	70372	8	5105	70800	8	5155	71223	9	5205	71642	8
5006	69949	9	5056	70381	9	5106	70808	9	5156	71231	8	5206	71650	8
5007	69958	9	5057	70389	8	5107	70817	8	5157	71240	9	5207	71659	9
5008	69966	8	5058	70398	9	5108	70825	9	5158	71248	8	5208	71667	8
5009	69975	9	5059	70406	8	5109	70834	8	5159	71257	9	5209	71675	8
5010	69984	9	5060	70415	9	5110	70842	9	5160	71265	8	5210	71684	9
5011	69992	8	5061	70424	9	5111	70851	8	5161	71273	8	5211	71692	8
5012	70001	9	5062	70432	8	5112	70859	9	5162	71282	9	5212	71700	8
5013	70010	9	5063	70441	9	5113	70868	8	5163	71290	8	5213	71709	9
5014	70018	8	5064	70449	8	5114	70876	9	5164	71299	9	5214	71717	8
5015	70027	9	5065	70458	9	5115	70885	8	5165	71307	8	5215	71725	8
5016	70036	9	5066	70467	9	5116	70893	9	5166	71315	8	5216	71734	9
5017	70044	8	5067	70475	8	5117	70902	8	5167	71324	9	5217	71742	8
5018	70053	9	5068	70484	9	5118	70910	9	5168	71332	8	5218	71750	8
5019	70062	8	5069	70492	8	5119	70919	8	5169	71341	9	5219	71759	9
5020	70070	8	5070	70501	9	5120	70927	8	5170	71349	8	5220	71767	8
5021	70079	9	5071	70509	8	5121	70935	9	5171	71357	8	5221	71775	8
5022	70088	9	5072	70518	9	5122	70944	8	5172	71366	9	5222	71784	9
5023	70096	8	5073	70526	8	5123	70952	9	5173	71374	8	5223	71792	8
5024	70105	9	5074	70535	9	5124	70961	8	5174	71383	9	5224	71800	8
5025	70114	9	5075	70544	9	5125	70969	9	5175	71391	8	5225	71809	9
5026	70122	8	5076	70552	8	5126	70978	8	5176	71399	8	5226	71817	8
5027	70131	9	5077	70561	9	5127	70986	9	5177	71408	9	5227	71825	8
5028	70140	9	5078	70569	8	5128	70995	8	5178	71416	8	5228	71834	9
5029	70148	8	5079	70578	9	5129	71003	9	5179	71425	9	5229	71842	8
5030	70157	9	5080	70586	8	5130	71012	8	5180	71433	8	5230	71850	8
5031	70165	8	5081	70595	9	5131	71020	9	5181	71441	8	5231	71858	9
5032	70174	9	5082	70603	8	5132	71029	8	5182	71450	9	5232	71867	8
5033	70183	9	5083	70612	9	5133	71037	9	5183	71458	8	5233	71875	8
5034	70191	8	5084	70621	9	5134	71046	8	5184	71466	9	5234	71883	9
5035	70200	9	5085	70629	8	5135	71054	9	5185	71475	8	5235	71892	8
5036	70209	9	5086	70638	9	5136	71063	8	5186	71483	9	5236	71900	8
5037	70217	8	5087	70646	8	5137	71071	8	5187	71492	8	5237	71908	9
5038	70226	9	5088	70655	9	5138	71079	9	5188	71500	8	5238	71917	8
5039	70234	8	5089	70663	8	5139	71088	8	5189	71508	9	5239	71925	8
5040	70243	9	5090	70672	9	5140	71096	9	5190	71517	8	5240	71933	8
5041	70252	9	5091	70680	8	5141	71105	8	5191	71525	8	5241	71941	9
5042	70260	8	5092	70689	9	5142	71113	9	5192	71533	9	5242	71950	8
5043	70269	9	5093	70697	8	5143	71122	8	5193	71542	8	5243	71958	8
5044	70278	9	5094	70706	9	5144	71130	9	5194	71550	9	5244	71966	9
5045	70286	8	5095	70714	8	5145	71139	8	5195	71559	8	5245	71975	8
5046	70295	9	5096	70723	9	5146	71147	8	5196	71567	8	5246	71983	8
5047	70303	8	5097	70731	8	5147	71155	9	5197	71575	9	5247	71991	8
5048	70312	9	5098	70740	9	5148	71164	8	5198	71584	8	5248	71999	9
5049	70321	9	5099	70749	9	5149	71172	9	5199	71592	8	5249	72008	8
5050	70329	8	5100	70757	8	5150	71181	9	5200	71600	8	5250	72016	8

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
6751	82937	7	6801	83257	6	6851	83575	6	6901	83891	6	6951	84205	7
6752	82943	6	6802	83264	7	6852	83582	7	6902	83897	6	6952	84211	6
6753	82950	7	6803	83270	6	6853	83588	6	6903	83904	7	6953	84217	6
6754	82956	6	6804	83276	6	6854	83594	6	6904	83910	6	6954	84223	6
6755	82963	7	6805	83283	7	6855	83601	7	6905	83916	6	6955	84230	7
6756	82969	6	6806	83289	6	6856	83607	6	6906	83923	7	6956	84236	6
6757	82975	6	6807	83296	7	6857	83613	6	6907	83929	6	6957	84242	6
6758	82982	7	6808	83302	6	6858	83620	7	6908	83935	6	6958	84248	6
6759	82988	6	6809	83308	6	6859	83626	6	6909	83942	7	6959	84255	7
6760	82995	7	6810	83315	7	6860	83632	6	6910	83948	6	6960	84261	6
6761	83001	6	6811	83321	6	6861	83639	7	6911	83954	6	6961	84267	6
6762	83008	7	6812	83327	6	6862	83645	6	6912	83960	6	6962	84273	6
6763	83014	6	6813	83334	7	6863	83651	6	6913	83967	7	6963	84280	7
6764	83020	6	6814	83340	6	6864	83658	7	6914	83973	6	6964	84286	6
6765	83027	7	6815	83347	7	6865	83664	6	6915	83979	6	6965	84292	6
6766	83033	6	6816	83353	6	6866	83670	6	6916	83985	6	6966	84298	6
6767	83040	7	6817	83359	6	6867	83677	7	6917	83992	7	6967	84305	7
6768	83046	6	6818	83366	7	6868	83683	6	6918	83998	6	6968	84311	6
6769	83052	6	6819	83372	6	6869	83689	6	6919	84004	6	6969	84317	6
6770	83059	7	6820	83378	6	6870	83696	7	6920	84011	7	6970	84323	6
6771	83065	6	6821	83385	7	6871	83702	6	6921	84017	6	6971	84330	7
6772	83072	7	6822	83391	6	6872	83708	6	6922	84023	6	6972	84336	6
6773	83078	6	6823	83398	7	6873	83715	7	6923	84029	6	6973	84342	6
6774	83085	7	6824	83404	6	6874	83721	6	6924	84036	7	6974	84348	6
6775	83091	6	6825	83410	6	6875	83727	6	6925	84042	6	6975	84354	6
6776	83097	6	6826	83417	7	6876	83734	7	6926	84048	6	6976	84361	7
6777	83104	7	6827	83423	6	6877	83740	6	6927	84055	7	6977	84367	6
6778	83110	6	6828	83429	6	6878	83746	6	6928	84061	6	6978	84373	6
6779	83117	7	6829	83436	7	6879	83753	7	6929	84067	6	6979	84379	6
6780	83123	6	6830	83442	6	6880	83759	6	6930	84073	6	6980	84386	7
6781	83129	6	6831	83448	6	6881	83765	6	6931	84080	7	6981	84392	6
6782	83136	7	6832	83455	7	6882	83771	6	6932	84086	6	6982	84398	6
6783	83142	6	6833	83461	6	6883	83778	7	6933	84092	6	6983	84404	6
6784	83149	7	6834	83467	6	6884	83784	6	6934	84098	6	6984	84410	6
6785	83155	6	6835	83474	7	6885	83790	6	6935	84105	7	6985	84417	7
6786	83161	6	6836	83480	6	6886	83797	6	6936	84111	6	6986	84423	6
6787	83168	7	6837	83487	7	6887	83803	6	6937	84117	6	6987	84429	6
6788	83174	6	6838	83493	6	6888	83809	6	6938	84123	6	6988	84435	6
6789	83181	7	6839	83499	6	6889	83816	7	6939	84130	7	6989	84442	7
6790	83187	6	6840	83506	7	6890	83822	6	6940	84136	6	6990	84448	6
6791	83193	6	6841	83512	6	6891	83828	6	6941	84142	6	6991	84454	6
6792	83200	7	6842	83518	6	6892	83835	7	6942	84148	6	6992	84461	7
6793	83206	6	6843	83525	7	6893	83841	6	6943	84155	7	6993	84466	6
6794	83213	7	6844	83531	6	6894	83847	6	6944	84161	6	6994	84473	7
6795	83219	6	6845	83537	6	6895	83853	6	6945	84167	6	6995	84479	6
6796	83225	6	6846	83544	7	6896	83860	7	6946	84173	6	6996	84485	6
6797	83232	7	6847	83550	6	6897	83866	6	6947	84180	7	6997	84491	6
6798	83238	6	6848	83556	6	6898	83872	6	6948	84186	6	6998	84497	6
6799	83245	7	6849	83563	7	6899	83879	7	6949	84192	6	6999	84504	7
6800	83251	6	6850	83569	6	6900	83885	6	6950	84198	6	7000	84510	6

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
7001	84516	6	7051	84825	6	7101	85132	6	7151	85437	6	7201	85739	6
7002	84522	6	7052	84831	6	7102	85138	6	7152	85443	6	7202	85745	6
7003	84528	6	7053	84837	6	7103	85144	6	7153	85449	6	7203	85751	6
7004	84535	7	7054	84844	7	7104	85150	6	7154	85455	6	7204	85757	6
7005	84541	6	7055	84850	6	7105	85156	6	7155	85461	6	7205	85763	6
7006	84547	6	7056	84856	6	7106	85163	7	7156	85467	6	7206	85769	6
7007	84553	6	7057	84862	6	7107	85169	6	7157	85473	6	7207	85775	6
7008	84559	6	7058	84868	6	7108	85175	6	7158	85479	6	7208	85781	6
7009	84566	7	7059	84874	6	7109	85181	6	7159	85485	6	7209	85788	7
7010	84572	6	7060	84880	6	7110	85187	6	7160	85491	6	7210	85794	6
7011	84578	6	7061	84887	7	7111	85193	6	7161	85497	6	7211	85800	6
7012	84584	6	7062	84893	6	7112	85199	6	7162	85503	6	7212	85806	6
7013	84590	6	7063	84899	6	7113	85205	6	7163	85509	6	7213	85812	6
7014	84597	7	7064	84905	6	7114	85211	6	7164	85516	7	7214	85818	6
7015	84603	6	7065	84911	6	7115	85217	6	7165	85522	6	7215	85824	6
7016	84609	6	7066	84917	6	7116	85224	7	7166	85528	6	7216	85830	6
7017	84615	6	7067	84924	7	7117	85230	6	7167	85534	6	7217	85836	6
7018	84621	6	7068	84930	6	7118	85236	6	7168	85540	6	7218	85842	6
7019	84628	7	7069	84936	6	7119	85242	6	7169	85546	6	7219	85848	6
7020	84634	6	7070	84942	6	7120	85248	6	7170	85552	6	7220	85854	6
7021	84640	6	7071	84948	6	7121	85254	6	7171	85558	6	7221	85860	6
7022	84646	6	7072	84954	6	7122	85260	6	7172	85564	6	7222	85866	6
7023	84652	6	7073	84960	6	7123	85266	6	7173	85570	6	7223	85872	6
7024	84658	6	7074	84967	7	7124	85272	6	7174	85576	6	7224	85878	6
7025	84665	7	7075	84973	6	7125	85278	6	7175	85582	6	7225	85884	6
7026	84671	6	7076	84979	6	7126	85285	7	7176	85588	6	7226	85890	6
7027	84677	6	7077	84985	6	7127	85291	6	7177	85594	6	7227	85896	6
7028	84683	6	7078	84991	6	7128	85297	6	7178	85600	6	7228	85902	6
7029	84689	6	7079	84997	6	7129	85303	6	7179	85606	6	7229	85908	6
7030	84696	7	7080	85003	6	7130	85309	6	7180	85612	6	7230	85914	6
7031	84702	6	7081	85009	6	7131	85315	6	7181	85618	6	7231	85920	6
7032	84708	6	7082	85016	7	7132	85321	6	7182	85625	7	7232	85926	6
7033	84714	6	7083	85022	6	7133	85327	6	7183	85631	6	7233	85932	6
7034	84720	6	7084	85028	6	7134	85333	6	7184	85637	6	7234	85938	6
7035	84726	6	7085	85034	6	7135	85339	6	7185	85643	6	7235	85944	6
7036	84733	7	7086	85040	6	7136	85345	6	7186	85649	6	7236	85950	6
7037	84739	6	7087	85046	6	7137	85352	7	7187	85655	6	7237	85956	6
7038	84745	6	7088	85052	6	7138	85358	6	7188	85661	6	7238	85962	6
7039	84751	6	7089	85058	6	7139	85364	6	7189	85667	6	7239	85968	6
7040	84757	6	7090	85065	7	7140	85370	6	7190	85673	6	7240	85974	6
7041	84763	6	7091	85071	6	7141	85376	6	7191	85679	6	7241	85980	6
7042	84770	7	7092	85077	6	7142	85382	6	7192	85685	6	7242	85986	6
7043	84776	6	7093	85083	6	7143	85388	6	7193	85691	6	7243	85992	6
7044	84782	6	7094	85089	6	7144	85394	6	7194	85697	6	7244	85998	6
7045	84788	6	7095	85095	6	7145	85400	6	7195	85703	6	7245	86004	6
7046	84794	6	7096	85101	6	7146	85406	6	7196	85709	6	7246	86010	6
7047	84800	7	7097	85107	7	7147	85412	6	7197	85715	6	7247	86016	6
7048	84807	6	7098	85114	6	7148	85418	7	7198	85721	6	7248	86022	6
7049	84813	6	7099	85120	6	7149	85425	6	7199	85727	6	7249	86028	6
7050	84819		7100	85126		7150	85431		7200	85733		7250	86034	

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
7251	86040	6	7301	86338	6	7351	86635	6	7401	86929	6	7451	87221	5
7252	86046	6	7302	86344	6	7352	86641	6	7402	86935	6	7452	87227	6
7253	86052	6	7303	86350	6	7353	86646	5	7403	86941	6	7453	87233	6
7254	86058	6	7304	86356	6	7354	86652	6	7404	86947	6	7454	87239	6
7255	86064	6	7305	86362	6	7355	86658	6	7405	86953	5	7455	87245	6
7256	86070	6	7306	86368	6	7356	86664	6	7406	86958	6	7456	87251	5
7257	86076	6	7307	86374	6	7357	86670	6	7407	86964	6	7457	87256	6
7258	86082	6	7308	86380	6	7358	86676	6	7408	86970	6	7458	87262	6
7259	86088	6	7309	86386	6	7359	86682	6	7409	86976	6	7459	87268	6
7260	86094	6	7310	86392	6	7360	86688	6	7410	86982	6	7460	87274	6
7261	86100	6	7311	86398	6	7361	86694	6	7411	86988	6	7461	87280	6
7262	86106	6	7312	86404	6	7362	86700	5	7412	86994	5	7462	87286	5
7263	86112	6	7313	86410	6	7363	86705	6	7413	86999	6	7463	87291	6
7264	86118	6	7314	86415	5	7364	86711	6	7414	87005	6	7464	87297	6
7265	86124	6	7315	86421	6	7365	86717	6	7415	87011	6	7465	87303	6
7266	86130	6	7316	86427	6	7366	86723	6	7416	87017	6	7466	87309	6
7267	86136	5	7317	86433	6	7367	86729	6	7417	87023	6	7467	87315	5
7268	86141	6	7318	86439	6	7368	86735	6	7418	87029	6	7468	87320	6
7269	86147	6	7319	86445	6	7369	86741	6	7419	87035	5	7469	87326	6
7270	86153	6	7320	86451	6	7370	86747	6	7420	87040	6	7470	87332	6
7271	86159	6	7321	86457	6	7371	86753	6	7421	87046	6	7471	87338	6
7272	86165	6	7322	86463	6	7372	86759	5	7422	87052	6	7472	87344	5
7273	86171	6	7323	86469	6	7373	86764	6	7423	87058	6	7473	87349	6
7274	86177	6	7324	86475	6	7374	86770	6	7424	87064	6	7474	87355	6
7275	86183	6	7325	86481	6	7375	86776	6	7425	87070	5	7475	87361	6
7276	86189	6	7326	86487	6	7376	86782	6	7426	87075	6	7476	87367	6
7277	86195	6	7327	86493	6	7377	86788	6	7427	87081	6	7477	87373	6
7278	86201	6	7328	86499	5	7378	86794	6	7428	87087	6	7478	87379	5
7279	86207	6	7329	86504	6	7379	86800	6	7429	87093	6	7479	87384	6
7280	86213	6	7330	86510	6	7380	86806	6	7430	87099	6	7480	87390	6
7281	86219	6	7331	86516	6	7381	86812	5	7431	87105	6	7481	87396	6
7282	86225	6	7332	86522	6	7382	86817	6	7432	87111	5	7482	87402	6
7283	86231	6	7333	86528	6	7383	86823	6	7433	87116	6	7483	87408	5
7284	86237	6	7334	86534	6	7384	86829	6	7434	87122	6	7484	87413	6
7285	86243	6	7335	86540	6	7385	86835	6	7435	87128	6	7485	87419	6
7286	86249	6	7336	86546	6	7386	86841	6	7436	87134	6	7486	87425	6
7287	86255	6	7337	86552	6	7387	86847	6	7437	87140	6	7487	87431	6
7288	86261	6	7338	86558	6	7388	86853	6	7438	87146	5	7488	87437	5
7289	86267	6	7339	86564	6	7389	86859	5	7439	87151	6	7489	87442	6
7290	86273	6	7340	86570	6	7390	86864	6	7440	87157	6	7490	87448	6
7291	86279	6	7341	86576	5	7391	86870	6	7441	87163	6	7491	87454	6
7292	86285	6	7342	86581	6	7392	86876	6	7442	87169	6	7492	87460	6
7293	86291	6	7343	86587	6	7393	86882	6	7443	87175	6	7493	87466	5
7294	86297	6	7344	86593	6	7394	86888	6	7444	87181	5	7494	87471	6
7295	86303	5	7345	86599	6	7395	86894	6	7445	87186	6	7495	87477	6
7296	86308	6	7346	86605	6	7396	86900	5	7446	87192	6	7496	87483	6
7297	86314	6	7347	86611	6	7397	86906	6	7447	87198	6	7497	87489	5
7298	86320	6	7348	86617	6	7398	86911	6	7448	87204	6	7498	87495	6
7299	86326	6	7349	86623	6	7399	86917	6	7449	87210	6	7499	87500	6
7300	86332		7350	86629		7400	86923		7450	87216		7500	87506	

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
7501	87512	6	7551	87800	5	7601	88087	6	7651	88372	6	7701	88655	6
7502	87518	6	7552	87806	6	7602	88093	6	7652	88377	5	7702	88660	5
7503	87523	5	7553	87812	6	7603	88098	5	7653	88383	6	7703	88666	6
7504	87529	6	7554	87818	6	7604	88104	6	7654	88389	6	7704	88672	6
7505	87535	6	7555	87823	5	7605	88110	6	7655	88395	6	7705	88677	5
7506	87541	6	7556	87829	6	7606	88116	6	7656	88400	5	7706	88683	6
7507	87547	6	7557	87835	6	7607	88121	5	7657	88406	6	7707	88689	6
7508	87552	5	7558	87841	6	7608	88127	6	7658	88412	6	7708	88694	5
7509	87558	6	7559	87846	5	7609	88133	6	7659	88417	5	7709	88700	6
7510	87564	6	7560	87852	6	7610	88138	5	7660	88423	6	7710	88705	5
7511	87570	6	7561	87858	6	7611	88144	6	7661	88429	5	7711	88711	6
7512	87576	6	7562	87864	5	7612	88150	6	7662	88434	6	7712	88717	6
7513	87581	5	7563	87869	6	7613	88156	5	7663	88440	6	7713	88722	5
7514	87587	6	7564	87875	6	7614	88161	6	7664	88446	6	7714	88728	6
7515	87593	6	7565	87881	6	7615	88167	6	7665	88451	5	7715	88734	6
7516	87599	6	7566	87887	5	7616	88173	6	7666	88457	6	7716	88739	5
7517	87604	5	7567	87892	6	7617	88178	5	7667	88463	6	7717	88745	6
7518	87610	6	7568	87898	6	7618	88184	6	7668	88468	5	7718	88750	5
7519	87616	6	7569	87904	6	7619	88190	6	7669	88474	6	7719	88756	6
7520	87622	6	7570	87910	6	7620	88195	5	7670	88480	6	7720	88762	6
7521	87628	6	7571	87915	5	7621	88201	6	7671	88485	5	7721	88767	5
7522	87633	5	7572	87921	6	7622	88207	6	7672	88491	6	7722	88773	6
7523	87639	6	7573	87927	6	7623	88213	6	7673	88497	6	7723	88779	6
7524	87645	6	7574	87933	6	7624	88218	5	7674	88502	5	7724	88784	5
7525	87651	6	7575	87938	5	7625	88224	6	7675	88508	6	7725	88790	6
7526	87656	5	7576	87944	6	7626	88230	6	7676	88513	5	7726	88795	5
7527	87662	6	7577	87950	6	7627	88235	5	7677	88519	6	7727	88801	6
7528	87668	6	7578	87955	5	7628	88241	6	7678	88525	6	7728	88807	6
7529	87674	6	7579	87961	6	7629	88247	6	7679	88530	5	7729	88812	5
7530	87679	5	7580	87967	6	7630	88252	5	7680	88536	6	7730	88818	6
7531	87685	6	7581	87973	6	7631	88258	6	7681	88542	6	7731	88824	6
7532	87691	6	7582	87978	5	7632	88264	6	7682	88547	5	7732	88829	5
7533	87697	6	7583	87984	6	7633	88270	6	7683	88553	6	7733	88835	6
7534	87703	6	7584	87990	6	7634	88275	5	7684	88559	6	7734	88840	5
7535	87708	5	7585	87996	6	7635	88281	6	7685	88564	5	7735	88846	6
7536	87714	6	7586	88001	5	7636	88287	6	7686	88570	6	7736	88852	6
7537	87720	6	7587	88007	6	7637	88292	5	7687	88576	6	7737	88857	5
7538	87726	6	7588	88013	6	7638	88298	6	7688	88581	5	7738	88863	6
7539	87731	5	7589	88018	5	7639	88304	6	7689	88587	6	7739	88868	5
7540	87737	6	7590	88024	6	7640	88309	5	7690	88593	6	7740	88874	6
7541	87743	6	7591	88030	6	7641	88315	6	7691	88598	5	7741	88880	6
7542	87749	6	7592	88036	6	7642	88321	6	7692	88604	6	7742	88885	5
7543	87754	5	7593	88041	5	7643	88326	5	7693	88610	6	7743	88891	6
7544	87760	6	7594	88047	6	7644	88332	6	7694	88615	5	7744	88897	6
7545	87766	6	7595	88053	6	7645	88338	6	7695	88621	6	7745	88902	5
7546	87772	6	7596	88058	5	7646	88343	5	7696	88627	6	7746	88908	6
7547	87777	5	7597	88064	6	7647	88349	6	7697	88632	5	7747	88913	5
7548	87783	6	7598	88070	6	7648	88355	6	7698	88638	6	7748	88919	6
7549	87789	6	7599	88076	6	7649	88360	5	7699	88643	5	7749	88925	6
7550	87795	6	7600	88081	5	7650	88366	6	7700	88649	6	7750	88930	5

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log	D
7751	88936	6	7801	89215	6	7851	89492	5	7901	89768	5	7951	90042	5
7752	88941	5	7802	89221	6	7852	89498	6	7902	89774	6	7952	90048	6
7753	88947	6	7803	89226	5	7853	89504	5	7903	89779	5	7953	90053	5
7754	88953	6	7804	89232	6	7854	89509	6	7904	89785	6	7954	90059	6
7755	88958	5	7805	89237	5	7855	89515	6	7905	89790	5	7955	90064	5
7756	88964	6	7806	89243	6	7856	89520	5	7906	89796	6	7956	90069	5
7757	88969	5	7807	89248	5	7857	89526	6	7907	89801	5	7957	90075	6
7758	88975	6	7808	89254	6	7858	89531	5	7908	89807	6	7958	90080	5
7759	88981	6	7809	89260	6	7859	89537	6	7909	89812	5	7959	90086	6
7760	88986	5	7810	89265	5	7860	89542	5	7910	89818	6	7960	90091	5
7761	88992	6	7811	89271	6	7861	89548	6	7911	89823	5	7961	90097	6
7762	88997	5	7812	89276	5	7862	89553	5	7912	89829	6	7962	90102	5
7763	89003	6	7813	89282	6	7863	89559	6	7913	89834	5	7963	90108	6
7764	89009	6	7814	89287	5	7864	89564	5	7914	89840	6	7964	90113	5
7765	89014	5	7815	89293	6	7865	89570	6	7915	89845	5	7965	90119	6
7766	89020	6	7816	89298	5	7866	89575	5	7916	89851	6	7966	90124	5
7767	89025	5	7817	89304	6	7867	89581	6	7917	89856	5	7967	90129	5
7768	89031	6	7818	89310	6	7868	89586	5	7918	89862	6	7968	90135	6
7769	89037	6	7819	89315	5	7869	89592	6	7919	89867	5	7969	90140	5
7770	89042	5	7820	89321	6	7870	89597	5	7920	89873	6	7970	90146	6
7771	89048	6	7821	89326	5	7871	89603	6	7921	89878	5	7971	90151	5
7772	89053	5	7822	89332	6	7872	89609	6	7922	89883	5	7972	90157	6
7773	89059	6	7823	89337	5	7873	89614	5	7923	89889	6	7973	90162	5
7774	89064	5	7824	89343	6	7874	89620	6	7924	89894	5	7974	90168	6
7775	89070	6	7825	89348	5	7875	89625	5	7925	89900	6	7975	90173	5
7776	89076	5	7826	89354	6	7876	89631	6	7926	89905	5	7976	90179	6
7777	89081	6	7827	89360	5	7877	89636	5	7927	89911	6	7977	90184	5
7778	89087	5	7828	89365	6	7878	89642	6	7928	89916	5	7978	90189	6
7779	89092	6	7829	89371	5	7879	89647	5	7929	89922	6	7979	90195	5
7780	89098	6	7830	89376	6	7880	89653	6	7930	89927	5	7980	90200	6
7781	89104	5	7831	89382	5	7881	89658	5	7931	89933	6	7981	90206	5
7782	89109	6	7832	89387	6	7882	89664	6	7932	89938	5	7982	90211	6
7783	89115	6	7833	89393	5	7883	89669	5	7933	89944	6	7983	90217	5
7784	89120	5	7834	89398	6	7884	89675	6	7934	89949	5	7984	90222	5
7785	89126	6	7835	89404	5	7885	89680	5	7935	89955	6	7985	90227	6
7786	89131	5	7836	89409	6	7886	89686	6	7936	89960	5	7986	90233	5
7787	89137	6	7837	89415	6	7887	89691	5	7937	89966	6	7987	90238	6
7788	89143	5	7838	89421	5	7888	89697	6	7938	89971	5	7988	90244	5
7789	89148	6	7839	89426	6	7889	89702	5	7939	89977	6	7989	90249	6
7790	89154	5	7840	89432	5	7890	89708	6	7940	89982	5	7990	90255	5
7791	89159	6	7841	89437	6	7891	89713	5	7941	89988	6	7991	90260	6
7792	89165	5	7842	89443	5	7892	89719	6	7942	89993	5	7992	90266	5
7793	89170	6	7843	89448	6	7893	89724	6	7943	89998	6	7993	90271	5
7794	89176	6	7844	89454	5	7894	89730	5	7944	90004	5	7994	90276	6
7795	89182	5	7845	89459	6	7895	89735	6	7945	90009	6	7995	90282	5
7796	89187	6	7846	89465	5	7896	89741	5	7946	90015	5	7996	90287	6
7797	89193	5	7847	89470	6	7897	89746	6	7947	90020	5	7997	90293	5
7798	89198	6	7848	89476	5	7898	89752	5	7948	90026	5	7998	90298	6
7799	89204	5	7849	89481	6	7899	89757	6	7949	90031	6	7999	90304	5
7800	89209		7850	89487		7900	89763		7950	90037		8000	90309	

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
7001	84516	6	7051	84825	6	7101	85132	6	7151	85437	6	7201	85739	6
7002	84522	6	7052	84831	6	7102	85138	6	7152	85443	6	7202	85745	6
7003	84528	6	7053	84837	6	7103	85144	6	7153	85449	6	7203	85751	6
7004	84535	7	7054	84844	7	7104	85150	6	7154	85455	6	7204	85757	6
7005	84541	6	7055	84850	6	7105	85156	6	7155	85461	6	7205	85763	6
7006	84547	6	7056	84856	6	7106	85163	7	7156	85467	6	7206	85769	6
7007	84553	6	7057	84862	6	7107	85169	6	7157	85473	6	7207	85775	6
7008	84559	6	7058	84868	6	7108	85175	6	7158	85479	6	7208	85781	6
7009	84566	7	7059	84874	6	7109	85181	6	7159	85485	6	7209	85788	7
7010	84572	6	7060	84880	6	7110	85187	6	7160	85491	6	7210	85794	6
7011	84578	6	7061	84887	7	7111	85193	6	7161	85497	6	7211	85800	6
7012	84584	6	7062	84893	6	7112	85199	6	7162	85503	6	7212	85806	6
7013	84590	6	7063	84899	6	7113	85205	6	7163	85509	6	7213	85812	6
7014	84597	7	7064	84905	6	7114	85211	6	7164	85516	7	7214	85818	6
7015	84603	6	7065	84911	6	7115	85217	6	7165	85522	6	7215	85824	6
7016	84609	6	7066	84917	6	7116	85224	7	7166	85528	6	7216	85830	6
7017	84615	6	7067	84924	7	7117	85230	6	7167	85534	6	7217	85836	6
7018	84621	6	7068	84930	6	7118	85236	6	7168	85540	6	7218	85842	6
7019	84628	7	7069	84936	6	7119	85242	6	7169	85546	6	7219	85848	6
7020	84634	6	7070	84942	6	7120	85248	6	7170	85552	6	7220	85854	6
7021	84640	6	7071	84948	6	7121	85254	6	7171	85558	6	7221	85860	6
7022	84646	6	7072	84954	6	7122	85260	6	7172	85564	6	7222	85866	6
7023	84652	6	7073	84960	6	7123	85266	6	7173	85570	6	7223	85872	6
7024	84658	7	7074	84967	7	7124	85272	6	7174	85576	6	7224	85878	6
7025	84665	6	7075	84973	6	7125	85278	6	7175	85582	6	7225	85884	6
7026	84671	6	7076	84979	6	7126	85285	7	7176	85588	6	7226	85890	6
7027	84677	6	7077	84985	6	7127	85291	6	7177	85594	6	7227	85896	6
7028	84683	6	7078	84991	6	7128	85297	6	7178	85600	6	7228	85902	6
7029	84689	6	7079	84997	6	7129	85303	6	7179	85606	6	7229	85908	6
7030	84696	7	7080	85003	6	7130	85309	6	7180	85612	6	7230	85914	6
7031	84702	6	7081	85009	6	7131	85315	6	7181	85618	6	7231	85920	6
7032	84708	6	7082	85016	7	7132	85321	6	7182	85625	7	7232	85926	6
7033	84714	6	7083	85022	6	7133	85327	6	7183	85631	6	7233	85932	6
7034	84720	6	7084	85028	6	7134	85333	6	7184	85637	6	7234	85938	6
7035	84726	6	7085	85034	6	7135	85339	6	7185	85643	6	7235	85944	6
7036	84733	7	7086	85040	6	7136	85345	6	7186	85649	6	7236	85950	6
7037	84739	6	7087	85046	6	7137	85352	7	7187	85655	6	7237	85956	6
7038	84745	6	7088	85052	6	7138	85358	6	7188	85661	6	7238	85962	6
7039	84751	6	7089	85058	6	7139	85364	6	7189	85667	6	7239	85968	6
7040	84757	6	7090	85065	7	7140	85370	6	7190	85673	6	7240	85974	6
7041	84763	6	7091	85071	6	7141	85376	6	7191	85679	6	7241	85980	6
7042	84770	7	7092	85077	6	7142	85382	6	7192	85685	6	7242	85986	6
7043	84776	6	7093	85083	6	7143	85388	6	7193	85691	6	7243	85992	6
7044	84782	6	7094	85089	6	7144	85394	6	7194	85697	6	7244	85998	6
7045	84788	6	7095	85095	6	7145	85400	6	7195	85703	6	7245	86004	6
7046	84794	6	7096	85101	6	7146	85406	6	7196	85709	6	7246	86010	6
7047	84800	7	7097	85107	6	7147	85412	6	7197	85715	6	7247	86016	6
7048	84807	6	7098	85114	7	7148	85418	6	7198	85721	6	7248	86022	6
7049	84813	6	7099	85120	6	7149	85425	7	7199	85727	6	7249	86028	6
7050	84819		7100	85126		7150	85431	6	7200	85733		7250	86034	

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
7251	86040	6	7301	86338	6	7351	86635	6	7401	86929	6	7451	87221	5
7252	86046	6	7302	86344	6	7352	86641	6	7402	86935	6	7452	87227	6
7253	86052	6	7303	86350	6	7353	86646	5	7403	86941	6	7453	87233	6
7254	86058	6	7304	86356	6	7354	86652	6	7404	86947	6	7454	87239	6
7255	86064	6	7305	86362	6	7355	86658	6	7405	86953	5	7455	87245	6
7256	86070	6	7306	86368	6	7356	86664	6	7406	86958	6	7456	87251	5
7257	86076	6	7307	86374	6	7357	86670	6	7407	86964	6	7457	87256	6
7258	86082	6	7308	86380	6	7358	86676	6	7408	86970	6	7458	87262	6
7259	86088	6	7309	86386	6	7359	86682	6	7409	86976	6	7459	87268	6
7260	86094	6	7310	86392	6	7360	86688	6	7410	86982	6	7460	87274	6
7261	86100	6	7311	86398	6	7361	86694	6	7411	86988	6	7461	87280	6
7262	86106	6	7312	86404	6	7362	86700	5	7412	86994	5	7462	87286	5
7263	86112	6	7313	86410	5	7363	86705	6	7413	86999	6	7463	87291	6
7264	86118	6	7314	86415	6	7364	86711	6	7414	87005	6	7464	87297	6
7265	86124	6	7315	86421	6	7365	86717	6	7415	87011	6	7465	87303	6
7266	86130	6	7316	86427	6	7366	86723	6	7416	87017	6	7466	87309	6
7267	86136	5	7317	86433	6	7367	86729	6	7417	87023	6	7467	87315	5
7268	86141	6	7318	86439	6	7368	86735	6	7418	87029	6	7468	87320	6
7269	86147	6	7319	86445	6	7369	86741	6	7419	87035	5	7469	87326	6
7270	86153	6	7320	86451	6	7370	86747	6	7420	87040	6	7470	87332	6
7271	86159	6	7321	86457	6	7371	86753	6	7421	87046	6	7471	87338	6
7272	86165	6	7322	86463	6	7372	86759	5	7422	87052	6	7472	87344	5
7273	86171	6	7323	86469	6	7373	86764	6	7423	87058	6	7473	87349	6
7274	86177	6	7324	86475	6	7374	86770	6	7424	87064	6	7474	87355	6
7275	86183	6	7325	86481	6	7375	86776	6	7425	87070	5	7475	87361	6
7276	86189	6	7326	86487	6	7376	86782	6	7426	87075	6	7476	87367	6
7277	86195	6	7327	86493	6	7377	86788	6	7427	87081	6	7477	87373	6
7278	86201	6	7328	86499	5	7378	86794	6	7428	87087	6	7478	87379	5
7279	86207	6	7329	86504	6	7379	86800	6	7429	87093	6	7479	87384	6
7280	86213	6	7330	86510	6	7380	86806	6	7430	87099	6	7480	87390	6
7281	86219	6	7331	86516	6	7381	86812	5	7431	87105	6	7481	87396	6
7282	86225	6	7332	86522	6	7382	86817	6	7432	87111	5	7482	87402	6
7283	86231	6	7333	86528	6	7383	86823	6	7433	87116	6	7483	87408	5
7284	86237	6	7334	86534	6	7384	86829	6	7434	87122	6	7484	87413	6
7285	86243	6	7335	86540	6	7385	86835	6	7435	87128	6	7485	87419	6
7286	86249	6	7336	86546	6	7386	86841	6	7436	87134	6	7486	87425	6
7287	86255	6	7337	86552	6	7387	86847	6	7437	87140	6	7487	87431	6
7288	86261	6	7338	86558	6	7388	86853	5	7438	87146	5	7488	87437	5
7289	86267	6	7339	86564	6	7389	86859	6	7439	87151	6	7489	87442	6
7290	86273	6	7340	86570	6	7390	86864	6	7440	87157	6	7490	87448	6
7291	86279	6	7341	86576	5	7391	86870	6	7441	87163	6	7491	87454	6
7292	86285	6	7342	86581	6	7392	86876	6	7442	87169	6	7492	87460	6
7293	86291	6	7343	86587	6	7393	86882	6	7443	87175	6	7493	87466	5
7294	86297	6	7344	86593	6	7394	86888	6	7444	87181	5	7494	87471	6
7295	86303	5	7345	86599	6	7395	86894	6	7445	87186	6	7495	87477	6
7296	86308	6	7346	86605	6	7396	86900	6	7446	87192	6	7496	87483	6
7297	86314	6	7347	86611	6	7397	86906	5	7447	87198	6	7497	87489	6
7298	86320	6	7348	86617	6	7398	86911	6	7448	87204	6	7498	87495	5
7299	86326	6	7349	86623	6	7399	86917	6	7449	87210	6	7499	87500	6
7300	86332		7350	86629		7400	86923		7450	87216		7500	87506	

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
7501	87512	6	7551	87800	5	7601	88087	6	7651	88372	6	7701	88655	6
7502	87518	6	7552	87806	6	7602	88093	6	7652	88377	5	7702	88660	5
7503	87523	5	7553	87812	6	7603	88098	5	7653	88383	6	7703	88666	6
7504	87529	6	7554	87818	6	7604	88104	6	7654	88389	6	7704	88672	6
7505	87535	6	7555	87823	5	7605	88110	6	7655	88395	6	7705	88677	5
7506	87541	6	7556	87829	6	7606	88116	6	7656	88400	5	7706	88683	6
7507	87547	6	7557	87835	6	7607	88121	5	7657	88406	6	7707	88689	6
7508	87552	5	7558	87841	6	7608	88127	6	7658	88412	6	7708	88694	5
7509	87558	6	7559	87846	5	7609	88133	6	7659	88417	5	7709	88700	6
7510	87564	6	7560	87852	6	7610	88138	5	7660	88423	6	7710	88705	5
7511	87570	6	7561	87858	6	7611	88144	6	7661	88429	6	7711	88711	6
7512	87576	6	7562	87864	5	7612	88150	6	7662	88434	5	7712	88717	6
7513	87581	5	7563	87869	6	7613	88156	6	7663	88440	6	7713	88722	5
7514	87587	6	7564	87875	6	7614	88161	5	7664	88446	6	7714	88728	6
7515	87593	6	7565	87881	6	7615	88167	6	7665	88451	5	7715	88734	6
7516	87599	6	7566	87887	5	7616	88173	6	7666	88457	6	7716	88739	5
7517	87604	5	7567	87892	6	7617	88178	5	7667	88463	6	7717	88745	6
7518	87610	6	7568	87898	6	7618	88184	6	7668	88468	5	7718	88750	5
7519	87616	6	7569	87904	6	7619	88190	6	7669	88474	6	7719	88756	6
7520	87622	6	7570	87910	5	7620	88195	5	7670	88480	6	7720	88762	6
7521	87628	6	7571	87915	6	7621	88201	6	7671	88485	5	7721	88767	5
7522	87633	5	7572	87921	6	7622	88207	6	7672	88491	6	7722	88773	6
7523	87639	6	7573	87927	6	7623	88213	6	7673	88497	6	7723	88779	6
7524	87645	6	7574	87933	5	7624	88218	5	7674	88502	5	7724	88784	5
7525	87651	6	7575	87938	6	7625	88224	6	7675	88508	6	7725	88790	6
7526	87656	5	7576	87944	6	7626	88230	6	7676	88513	5	7726	88795	5
7527	87662	6	7577	87950	5	7627	88235	5	7677	88519	6	7727	88801	6
7528	87668	6	7578	87955	6	7628	88241	6	7678	88525	6	7728	88807	6
7529	87674	6	7579	87961	6	7629	88247	6	7679	88530	5	7729	88812	5
7530	87679	5	7580	87967	6	7630	88252	5	7680	88536	6	7730	88818	6
7531	87685	6	7581	87973	5	7631	88258	6	7681	88542	6	7731	88824	6
7532	87691	6	7582	87978	6	7632	88264	6	7682	88547	5	7732	88829	5
7533	87697	6	7583	87984	6	7633	88270	6	7683	88553	6	7733	88835	6
7534	87703	6	7584	87990	6	7634	88275	5	7684	88559	6	7734	88840	5
7535	87708	5	7585	87996	5	7635	88281	6	7685	88564	5	7735	88846	6
7536	87714	6	7586	88001	6	7636	88287	6	7686	88570	6	7736	88852	6
7537	87720	6	7587	88007	6	7637	88292	5	7687	88576	6	7737	88857	5
7538	87726	6	7588	88013	5	7638	88298	6	7688	88581	5	7738	88863	6
7539	87731	5	7589	88018	6	7639	88304	6	7689	88587	6	7739	88868	5
7540	87737	6	7590	88024	6	7640	88309	5	7690	88593	6	7740	88874	6
7541	87743	6	7591	88030	6	7641	88315	6	7691	88598	5	7741	88880	6
7542	87749	6	7592	88036	5	7642	88321	6	7692	88604	6	7742	88885	5
7543	87754	5	7593	88041	6	7643	88326	5	7693	88610	6	7743	88891	6
7544	87760	6	7594	88047	6	7644	88332	6	7694	88615	5	7744	88897	6
7545	87766	6	7595	88053	5	7645	88338	6	7695	88621	6	7745	88902	5
7546	87772	6	7596	88058	6	7646	88343	5	7696	88627	6	7746	88908	6
7547	87777	5	7597	88064	6	7647	88349	6	7697	88632	5	7747	88913	5
7548	87783	6	7598	88070	6	7648	88355	6	7698	88638	6	7748	88919	6
7549	87789	6	7599	88076	5	7649	88360	5	7699	88643	5	7749	88925	6
7550	87795	6	7600	88081	6	7650	88366	6	7700	88649	6	7750	88930	5

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
8251	91651	6	8301	91913	5	8351	92174	5	8401	92433	5	8451	92691	5
8252	91656	5	8302	91918	5	8352	92179	5	8402	92438	5	8452	92696	5
8253	91661	5	8303	91924	6	8353	92184	5	8403	92443	5	8453	92701	5
8254	91666	5	8304	91929	5	8354	92189	6	8404	92449	6	8454	92706	5
8255	91672	6	8305	91934	5	8355	92195	5	8405	92454	5	8455	92711	5
8256	91677	5	8306	91939	5	8356	92200	5	8406	92459	5	8456	92716	6
8257	91682	5	8307	91944	6	8357	92205	5	8407	92464	5	8457	92722	5
8258	91687	5	8308	91950	5	8358	92210	5	8408	92469	5	8458	92727	5
8259	91693	6	8309	91955	5	8359	92215	6	8409	92474	6	8459	92732	5
8260	91698	5	8310	91960	5	8360	92221	5	8410	92480	5	8460	92737	5
8261	91703	6	8311	91965	6	8361	92226	5	8411	92485	5	8461	92742	5
8262	91709	5	8312	91971	5	8362	92231	5	8412	92490	5	8462	92747	5
8263	91714	5	8313	91976	5	8363	92236	5	8413	92495	5	8463	92752	6
8264	91719	5	8314	91981	5	8364	92241	6	8414	92500	5	8464	92758	5
8265	91724	6	8315	91986	5	8365	92247	5	8415	92505	6	8465	92763	5
8266	91730	5	8316	91991	6	8366	92252	5	8416	92511	5	8466	92768	5
8267	91735	5	8317	91997	5	8367	92257	5	8417	92516	5	8467	92773	5
8268	91740	5	8318	92002	5	8368	92262	5	8418	92521	5	8468	92778	5
8269	91745	6	8319	92007	5	8369	92267	6	8419	92526	5	8469	92783	5
8270	91751	5	8320	92012	6	8370	92273	5	8420	92531	5	8470	92788	5
8271	91756	5	8321	92018	5	8371	92278	5	8421	92536	6	8471	92793	6
8272	91761	5	8322	92023	5	8372	92283	5	8422	92542	5	8472	92799	5
8273	91766	6	8323	92028	5	8373	92288	5	8423	92547	5	8473	92804	5
8274	91772	5	8324	92033	5	8374	92293	5	8424	92552	5	8474	92809	5
8275	91777	5	8325	92038	6	8375	92298	6	8425	92557	5	8475	92814	5
8276	91782	5	8326	92044	5	8376	92304	5	8426	92562	5	8476	92819	5
8277	91787	6	8327	92049	5	8377	92309	5	8427	92567	5	8477	92824	5
8278	91793	5	8328	92054	5	8378	92314	5	8428	92572	6	8478	92829	5
8279	91798	5	8329	92059	6	8379	92319	5	8429	92578	5	8479	92834	6
8280	91803	5	8330	92065	5	8380	92324	6	8430	92583	5	8480	92840	5
8281	91808	6	8331	92070	5	8381	92330	5	8431	92588	5	8481	92845	5
8282	91814	5	8332	92075	5	8382	92335	5	8432	92593	5	8482	92850	5
8283	91819	5	8333	92080	5	8383	92340	5	8433	92598	5	8483	92855	5
8284	91824	5	8334	92085	6	8384	92345	5	8434	92603	6	8484	92860	5
8285	91829	5	8335	92091	5	8385	92350	5	8435	92609	5	8485	92865	5
8286	91834	6	8336	92096	5	8386	92355	6	8436	92614	5	8486	92870	5
8287	91840	5	8337	92101	5	8387	92361	5	8437	92619	5	8487	92875	6
8288	91845	5	8338	92106	5	8388	92366	5	8438	92624	5	8488	92881	5
8289	91850	5	8339	92111	6	8389	92371	5	8439	92629	5	8489	92886	5
8290	91855	6	8340	92117	5	8390	92376	5	8440	92634	5	8490	92891	5
8291	91861	5	8341	92122	5	8391	92381	6	8441	92639	6	8491	92896	5
8292	91866	5	8342	92127	5	8392	92387	5	8442	92645	5	8492	92901	5
8293	91871	5	8343	92132	5	8393	92392	5	8443	92650	5	8493	92906	5
8294	91876	6	8344	92137	6	8394	92397	5	8444	92655	5	8494	92911	5
8295	91882	5	8345	92143	5	8395	92402	5	8445	92660	5	8495	92916	5
8296	91887	5	8346	92148	5	8396	92407	5	8446	92665	5	8496	92921	6
8297	91892	5	8347	92153	5	8397	92412	6	8447	92670	5	8497	92927	5
8298	91897	6	8348	92158	5	8398	92418	5	8448	92675	6	8498	92932	5
8299	91903	5	8349	92163	6	8399	92423	5	8449	92681	5	8499	92937	5
8300	91908		8350	92169		8400	92428		8450	92686		8500	92942	

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
9001	95429	5	9051	95670	5	9101	95909	5	9151	96147	5	9201	96384	5
9002	95434	5	9052	95674	4	9102	95914	5	9152	96152	5	9202	96388	4
9003	95439	5	9053	95679	5	9103	95918	4	9153	96156	4	9203	96393	5
9004	95444	5	9054	95684	5	9104	95923	5	9154	96161	5	9204	96398	5
9005	95448	4	9055	95689	5	9105	95928	5	9155	96166	5	9205	96402	4
9006	95453	5	9056	95694	5	9106	95933	5	9156	96171	5	9206	96407	5
9007	95458	5	9057	95698	4	9107	95938	5	9157	96175	4	9207	96412	5
9008	95463	5	9058	95703	5	9108	95942	4	9158	96180	5	9208	96417	5
9009	95468	5	9059	95708	5	9109	95947	5	9159	96185	5	9209	96421	4
9010	95472	4	9060	95713	5	9110	95952	5	9160	96190	5	9210	96426	5
9011	95477	5	9061	95718	5	9111	95957	5	9161	96194	4	9211	96431	5
9012	95482	5	9062	95722	4	9112	95961	4	9162	96199	5	9212	96435	4
9013	95487	5	9063	95727	5	9113	95966	5	9163	96204	5	9213	96440	5
9014	95492	5	9064	95732	5	9114	95971	5	9164	96209	5	9214	96445	5
9015	95497	5	9065	95737	5	9115	95976	5	9165	96213	4	9215	96450	5
9016	95501	4	9066	95742	5	9116	95980	4	9166	96218	5	9216	96454	4
9017	95506	5	9067	95746	4	9117	95985	5	9167	96223	5	9217	96459	5
9018	95511	5	9068	95751	5	9118	95990	5	9168	96227	4	9218	96464	5
9019	95516	5	9069	95756	5	9119	95995	5	9169	96232	5	9219	96468	4
9020	95521	5	9070	95761	5	9120	95999	4	9170	96237	5	9220	96473	5
9021	95525	4	9071	95766	5	9121	96004	5	9171	96242	5	9221	96478	5
9022	95530	5	9072	95770	4	9122	96009	5	9172	96246	4	9222	96483	5
9023	95535	5	9073	95775	5	9123	96014	5	9173	96251	5	9223	96487	4
9024	95540	5	9074	95780	5	9124	96019	5	9174	96256	5	9224	96492	5
9025	95545	5	9075	95785	5	9125	96023	4	9175	96261	5	9225	96497	5
9026	95550	4	9076	95789	4	9126	96028	5	9176	96265	4	9226	96501	4
9027	95554	5	9077	95794	5	9127	96033	5	9177	96270	5	9227	96506	5
9028	95559	5	9078	95799	5	9128	96038	5	9178	96275	5	9228	96511	5
9029	95564	5	9079	95804	5	9129	96042	4	9179	96280	5	9229	96515	4
9030	95569	5	9080	95809	5	9130	96047	5	9180	96284	4	9230	96520	5
9031	95574	4	9081	95813	4	9131	96052	5	9181	96289	5	9231	96525	5
9032	95578	4	9082	95818	5	9132	96057	5	9182	96294	5	9232	96530	5
9033	95583	5	9083	95823	5	9133	96061	4	9183	96298	4	9233	96534	4
9034	95588	5	9084	95828	5	9134	96066	5	9184	96303	5	9234	96539	5
9035	95593	5	9085	95832	4	9135	96071	5	9185	96308	5	9235	96544	5
9036	95598	4	9086	95837	5	9136	96076	4	9186	96313	4	9236	96548	4
9037	95602	5	9087	95842	5	9137	96080	5	9187	96317	4	9237	96553	5
9038	95607	5	9088	95847	5	9138	96085	5	9188	96322	5	9238	96558	5
9039	95612	5	9089	95852	5	9139	96090	5	9189	96327	5	9239	96562	4
9040	95617	5	9090	95856	4	9140	96095	5	9190	96332	5	9240	96567	5
9041	95622	4	9091	95861	5	9141	96099	4	9191	96336	4	9241	96572	5
9042	95626	4	9092	95866	5	9142	96104	5	9192	96341	5	9242	96577	5
9043	95631	5	9093	95871	5	9143	96109	5	9193	96346	5	9243	96581	4
9044	95636	5	9094	95875	4	9144	96114	5	9194	96350	4	9244	96586	5
9045	95641	5	9095	95880	5	9145	96118	4	9195	96355	5	9245	96591	5
9046	95646	4	9096	95885	5	9146	96123	5	9196	96360	5	9246	96595	4
9047	95650	5	9097	95890	5	9147	96128	5	9197	96365	5	9247	96600	5
9048	95655	5	9098	95895	5	9148	96133	5	9198	96369	4	9248	96605	5
9049	95660	5	9099	95899	4	9149	96137	4	9199	96374	5	9249	96609	4
9050	95665	5	9100	95904	5	9150	96142	5	9200	96379	5	9250	96614	5

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
9251	96619	5	9301	96853	5	9351	97086	5	9401	97317	4	9451	97548	5
9252	96624	5	9302	96858	5	9352	97090	4	9402	97322	5	9452	97552	4
9253	96628	4	9303	96862	4	9353	97095	5	9403	97327	5	9453	97557	5
9254	96633	5	9304	96867	5	9354	97100	5	9404	97331	4	9454	97562	5
9255	96638	5	9305	96872	5	9355	97104	4	9405	97336	5	9455	97566	4
9256	96642	4	9306	96876	4	9356	97109	5	9406	97340	4	9456	97571	5
9257	96647	5	9307	96881	5	9357	97114	5	9407	97345	5	9457	97575	4
9258	96652	5	9308	96886	5	9358	97118	4	9408	97350	5	9458	97580	5
9259	96656	4	9309	96890	4	9359	97123	5	9409	97354	4	9459	97585	5
9260	96661	5	9310	96895	5	9360	97128	5	9410	97359	5	9460	97589	4
9261	96666	5	9311	96900	5	9361	97132	4	9411	97364	5	9461	97594	5
9262	96670	4	9312	96904	4	9362	97137	5	9412	97368	4	9462	97598	4
9263	96675	5	9313	96909	5	9363	97142	5	9413	97373	5	9463	97603	5
9264	96680	5	9314	96914	5	9364	97146	4	9414	97377	4	9464	97607	4
9265	96685	5	9315	96918	4	9365	97151	5	9415	97382	5	9465	97612	5
9266	96689	4	9316	96923	5	9366	97155	4	9416	97387	5	9466	97617	5
9267	96694	5	9317	96928	5	9367	97160	5	9417	97391	4	9467	97621	4
9268	96699	5	9318	96932	4	9368	97165	5	9418	97396	5	9468	97626	5
9269	96703	4	9319	96937	5	9369	97169	4	9419	97400	4	9469	97630	4
9270	96708	5	9320	96942	5	9370	97174	5	9420	97405	5	9470	97635	5
9271	96713	5	9321	96946	4	9371	97179	5	9421	97410	5	9471	97640	5
9272	96717	4	9322	96951	5	9372	97183	4	9422	97414	4	9472	97644	4
9273	96722	5	9323	96956	5	9373	97188	5	9423	97419	5	9473	97649	5
9274	96727	5	9324	96960	4	9374	97192	4	9424	97424	5	9474	97653	4
9275	96731	4	9325	96965	5	9375	97197	5	9425	97428	4	9475	97658	5
9276	96736	5	9326	96970	5	9376	97202	5	9426	97433	5	9476	97663	5
9277	96741	5	9327	96974	4	9377	97206	4	9427	97437	4	9477	97667	4
9278	96745	4	9328	96979	5	9378	97211	5	9428	97442	5	9478	97672	5
9279	96750	5	9329	96984	5	9379	97216	5	9429	97447	5	9479	97676	4
9280	96755	5	9330	96988	4	9380	97220	4	9430	97451	4	9480	97681	5
9281	96759	4	9331	96993	5	9381	97225	5	9431	97456	5	9481	97685	4
9282	96764	5	9332	96997	4	9382	97230	5	9432	97460	4	9482	97690	5
9283	96769	5	9333	97002	5	9383	97234	4	9433	97465	5	9483	97695	5
9284	96774	5	9334	97007	5	9384	97239	5	9434	97470	5	9484	97699	4
9285	96778	4	9335	97011	4	9385	97243	4	9435	97474	4	9485	97704	5
9286	96783	5	9336	97016	5	9386	97248	5	9436	97479	5	9486	97708	4
9287	96788	5	9337	97021	5	9387	97253	5	9437	97483	4	9487	97713	5
9288	96792	4	9338	97025	4	9388	97257	4	9438	97488	5	9488	97717	4
9289	96797	5	9339	97030	5	9389	97262	5	9439	97493	5	9489	97722	5
9290	96802	5	9340	97035	5	9390	97267	5	9440	97497	4	9490	97727	5
9291	96806	4	9341	97039	4	9391	97271	4	9441	97502	5	9491	97731	4
9292	96811	5	9342	97044	5	9392	97276	5	9442	97506	4	9492	97736	5
9293	96816	5	9343	97049	5	9393	97280	4	9443	97511	5	9493	97740	4
9294	96820	4	9344	97053	4	9394	97285	5	9444	97516	5	9494	97745	5
9295	96825	5	9345	97058	5	9395	97290	5	9445	97520	4	9495	97749	4
9296	96830	5	9346	97063	5	9396	97294	4	9446	97525	5	9496	97754	5
9297	96834	4	9347	97067	4	9397	97299	5	9447	97529	4	9497	97759	5
9298	96839	5	9348	97072	5	9398	97304	5	9448	97534	5	9498	97763	4
9299	96844	5	9349	97077	5	9399	97308	4	9449	97539	5	9499	97768	5
9300	96848	4	9350	97081	4	9400	97313	5	9450	97543	4	9500	97772	4

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
9001	95429	5	9051	95670	5	9101	95909	5	9151	96147	5	9201	96384	5
9002	95434	5	9052	95674	4	9102	95914	5	9152	96152	5	9202	96388	4
9003	95439	5	9053	95679	5	9103	95918	4	9153	96156	4	9203	96393	5
9004	95444	5	9054	95684	5	9104	95923	5	9154	96161	5	9204	96398	5
9005	95448	4	9055	95689	5	9105	95928	5	9155	96166	5	9205	96402	4
9006	95453	5	9056	95694	5	9106	95933	5	9156	96171	5	9206	96407	5
9007	95458	5	9057	95698	4	9107	95938	5	9157	96175	4	9207	96412	5
9008	95463	5	9058	95703	5	9108	95942	4	9158	96180	5	9208	96417	5
9009	95468	5	9059	95708	5	9109	95947	5	9159	96185	5	9209	96421	4
9010	95472	4	9060	95713	5	9110	95952	5	9160	96190	5	9210	96426	5
9011	95477	5	9061	95718	5	9111	95957	5	9161	96194	4	9211	96431	5
9012	95482	5	9062	95722	4	9112	95961	4	9162	96199	5	9212	96435	4
9013	95487	5	9063	95727	5	9113	95966	5	9163	96204	5	9213	96440	5
9014	95492	5	9064	95732	5	9114	95971	5	9164	96209	5	9214	96445	5
9015	95497	5	9065	95737	5	9115	95976	5	9165	96213	4	9215	96450	5
9016	95501	4	9066	95742	5	9116	95980	4	9166	96218	5	9216	96454	4
9017	95506	5	9067	95746	4	9117	95985	5	9167	96223	5	9217	96459	5
9018	95511	5	9068	95751	5	9118	95990	5	9168	96227	4	9218	96464	5
9019	95516	5	9069	95756	5	9119	95995	5	9169	96232	5	9219	96468	4
9020	95521	5	9070	95761	5	9120	95999	4	9170	96237	5	9220	96473	5
9021	95525	4	9071	95766	5	9121	96004	5	9171	96242	5	9221	96478	5
9022	95530	5	9072	95770	4	9122	96009	5	9172	96246	4	9222	96483	5
9023	95535	5	9073	95775	5	9123	96014	5	9173	96251	5	9223	96487	4
9024	95540	5	9074	95780	5	9124	96019	5	9174	96256	5	9224	96492	5
9025	95545	5	9075	95785	5	9125	96023	4	9175	96261	5	9225	96497	5
9026	95550	4	9076	95789	4	9126	96028	5	9176	96265	4	9226	96501	4
9027	95554	5	9077	95794	5	9127	96033	5	9177	96270	5	9227	96506	5
9028	95559	5	9078	95799	5	9128	96038	5	9178	96275	5	9228	96511	5
9029	95564	5	9079	95804	5	9129	96042	4	9179	96280	5	9229	96515	4
9030	95569	5	9080	95809	5	9130	96047	5	9180	96284	4	9230	96520	5
9031	95574	4	9081	95813	4	9131	96052	5	9181	96289	5	9231	96525	5
9032	95578	5	9082	95818	5	9132	96057	5	9182	96294	5	9232	96530	5
9033	95583	5	9083	95823	5	9133	96061	4	9183	96298	4	9233	96534	4
9034	95588	5	9084	95828	5	9134	96066	5	9184	96303	5	9234	96539	5
9035	95593	5	9085	95832	4	9135	96071	5	9185	96308	5	9235	96544	5
9036	95598	4	9086	95837	5	9136	96076	4	9186	96313	4	9236	96548	4
9037	95602	5	9087	95842	5	9137	96080	5	9187	96317	4	9237	96553	5
9038	95607	5	9088	95847	5	9138	96085	5	9188	96322	5	9238	96558	5
9039	95612	5	9089	95852	5	9139	96090	5	9189	96327	5	9239	96562	4
9040	95617	5	9090	95856	4	9140	96095	5	9190	96332	5	9240	96567	5
9041	95622	4	9091	95861	5	9141	96099	4	9191	96336	4	9241	96572	5
9042	95626	5	9092	95866	5	9142	96104	5	9192	96341	5	9242	96577	5
9043	95631	5	9093	95871	5	9143	96109	5	9193	96346	5	9243	96581	4
9044	95636	5	9094	95875	4	9144	96114	5	9194	96350	4	9244	96586	5
9045	95641	5	9095	95880	5	9145	96118	4	9195	96355	5	9245	96591	5
9046	95646	4	9096	95885	5	9146	96123	5	9196	96360	5	9246	96595	4
9047	95650	5	9097	95890	5	9147	96128	5	9197	96365	5	9247	96600	5
9048	95655	5	9098	95895	5	9148	96133	5	9198	96369	4	9248	96605	5
9049	95660	5	9099	95899	4	9149	96137	4	9199	96374	5	9249	96609	4
9050	95665	5	9100	95904	5	9150	96142	5	9200	96379	5	9250	96614	5

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
9251	96619	5	9301	96853	5	9351	97086	5	9401	97317	4	9451	97548	5
9252	96624	5	9302	96858	5	9352	97090	4	9402	97322	5	9452	97552	4
9253	96628	4	9303	96862	4	9353	97095	5	9403	97327	4	9453	97557	5
9254	96633	5	9304	96867	5	9354	97100	4	9404	97331	4	9454	97562	4
9255	96638	4	9305	96872	4	9355	97104	5	9405	97336	5	9455	97566	5
9256	96642	5	9306	96876	5	9356	97109	5	9406	97340	5	9456	97571	4
9257	96647	5	9307	96881	5	9357	97114	4	9407	97345	5	9457	97575	5
9258	96652	4	9308	96886	4	9358	97118	5	9408	97350	4	9458	97580	5
9259	96656	5	9309	96890	5	9359	97123	5	9409	97354	5	9459	97585	4
9260	96661	5	9310	96895	5	9360	97128	4	9410	97359	5	9460	97589	5
9261	96666	4	9311	96900	4	9361	97132	5	9411	97364	4	9461	97594	4
9262	96670	5	9312	96904	5	9362	97137	5	9412	97368	5	9462	97598	5
9263	96675	5	9313	96909	5	9363	97142	4	9413	97373	4	9463	97603	4
9264	96680	5	9314	96914	4	9364	97146	5	9414	97377	5	9464	97607	5
9265	96685	4	9315	96918	5	9365	97151	4	9415	97382	5	9465	97612	5
9266	96689	5	9316	96923	5	9366	97155	5	9416	97387	4	9466	97617	4
9267	96694	5	9317	96928	4	9367	97160	5	9417	97391	5	9467	97621	5
9268	96699	4	9318	96932	5	9368	97165	4	9418	97396	4	9468	97626	4
9269	96703	5	9319	96937	5	9369	97169	5	9419	97400	5	9469	97630	5
9270	96708	5	9320	96942	4	9370	97174	5	9420	97405	5	9470	97635	5
9271	96713	4	9321	96946	5	9371	97179	4	9421	97410	4	9471	97640	4
9272	96717	5	9322	96951	5	9372	97183	5	9422	97414	5	9472	97644	5
9273	96722	5	9323	96956	4	9373	97188	4	9423	97419	5	9473	97649	4
9274	96727	4	9324	96960	5	9374	97192	5	9424	97424	4	9474	97653	5
9275	96731	5	9325	96965	5	9375	97197	5	9425	97428	5	9475	97658	5
9276	96736	5	9326	96970	4	9376	97202	4	9426	97433	4	9476	97663	4
9277	96741	4	9327	96974	5	9377	97206	5	9427	97437	5	9477	97667	5
9278	96745	5	9328	96979	5	9378	97211	5	9428	97442	5	9478	97672	4
9279	96750	5	9329	96984	4	9379	97216	4	9429	97447	4	9479	97676	5
9280	96755	4	9330	96988	5	9380	97220	5	9430	97451	5	9480	97681	4
9281	96759	5	9331	96993	4	9381	97225	5	9431	97456	4	9481	97685	5
9282	96764	5	9332	96997	5	9382	97230	4	9432	97460	5	9482	97690	5
9283	96769	5	9333	97002	5	9383	97234	5	9433	97465	5	9483	97695	4
9284	96774	4	9334	97007	4	9384	97239	4	9434	97470	4	9484	97699	5
9285	96778	5	9335	97011	5	9385	97243	5	9435	97474	5	9485	97704	4
9286	96783	5	9336	97016	5	9386	97248	5	9436	97479	4	9486	97708	5
9287	96788	4	9337	97021	4	9387	97253	4	9437	97483	5	9487	97713	4
9288	96792	5	9338	97025	5	9388	97257	5	9438	97488	5	9488	97717	5
9289	96797	5	9339	97030	5	9389	97262	5	9439	97493	4	9489	97722	5
9290	96802	4	9340	97035	4	9390	97267	4	9440	97497	5	9490	97727	4
9291	96806	5	9341	97039	5	9391	97271	5	9441	97502	4	9491	97731	5
9292	96811	5	9342	97044	5	9392	97276	4	9442	97506	5	9492	97736	4
9293	96816	4	9343	97049	4	9393	97280	5	9443	97511	5	9493	97740	5
9294	96820	5	9344	97053	5	9394	97285	5	9444	97516	4	9494	97745	4
9295	96825	5	9345	97058	5	9395	97290	4	9445	97520	5	9495	97749	5
9296	96830	4	9346	97063	4	9396	97294	5	9446	97525	4	9496	97754	5
9297	96834	5	9347	97067	5	9397	97299	5	9447	97529	5	9497	97759	4
9298	96839	5	9348	97072	5	9398	97304	4	9448	97534	5	9498	97763	5
9299	96844	4	9349	97077	4	9399	97308	5	9449	97539	4	9499	97768	4
9300	96848		9350	97081		9400	97313		9450	97543		9500	97772	

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
9501	97777	5	9551	98005	5	9601	98232	5	9651	98457	4	9701	98682	5
9502	97782	5	9552	98009	4	9602	98236	4	9652	98462	5	9702	98686	4
9503	97786	4	9553	98014	5	9603	98241	5	9653	98466	4	9703	98691	5
9504	97791	5	9554	98019	5	9604	98245	4	9654	98471	5	9704	98695	4
9505	97795	4	9555	98023	4	9605	98250	5	9655	98475	4	9705	98700	5
		5			5			4			5			4
9506	97800	4	9556	98028	4	9606	98254	5	9656	98480	4	9706	98704	5
9507	97804	5	9557	98032	5	9607	98259	4	9657	98484	5	9707	98709	4
9508	97809	4	9558	98037	4	9608	98263	5	9658	98489	4	9708	98713	4
9509	97813	5	9559	98041	5	9609	98268	4	9659	98493	5	9709	98717	5
9510	97818	5	9560	98046	4	9610	98272	5	9660	98498	4	9710	98722	4
		5			5			4			5			4
9511	97823	4	9561	98050	5	9611	98277	4	9661	98502	5	9711	98726	5
9512	97827	5	9562	98055	4	9612	98281	5	9662	98507	4	9712	98731	4
9513	97832	4	9563	98059	5	9613	98286	4	9663	98511	5	9713	98735	5
9514	97836	5	9564	98064	4	9614	98290	5	9664	98516	4	9714	98740	4
9515	97841	4	9565	98068	5	9615	98295	4	9665	98520	5	9715	98744	5
		5			4			5			4			5
9516	97845	5	9566	98073	5	9616	98299	5	9666	98525	4	9716	98749	4
9517	97850	5	9567	98078	4	9617	98304	4	9667	98529	5	9717	98753	5
9518	97855	4	9568	98082	5	9618	98308	5	9668	98534	4	9718	98758	4
9519	97859	5	9569	98087	4	9619	98313	5	9669	98538	5	9719	98762	5
9520	97864	4	9570	98091	5	9620	98318	4	9670	98543	4	9720	98767	4
		4			5			5			4			4
9521	97868	5	9571	98096	4	9621	98322	5	9671	98547	5	9721	98771	5
9522	97873	4	9572	98100	5	9622	98327	4	9672	98552	4	9722	98776	4
9523	97877	5	9573	98105	4	9623	98331	5	9673	98556	5	9723	98780	4
9524	97882	4	9574	98109	5	9624	98336	4	9674	98561	4	9724	98784	5
9525	97886	5	9575	98114	4	9625	98340	5	9675	98565	5	9725	98789	4
		5			5			4			5			4
9526	97891	5	9576	98118	5	9626	98345	4	9676	98570	4	9726	98793	5
9527	97896	4	9577	98123	4	9627	98349	5	9677	98574	5	9727	98798	4
9528	97900	5	9578	98127	5	9628	98354	4	9678	98579	4	9728	98802	5
9529	97905	4	9579	98132	5	9629	98358	5	9679	98583	5	9729	98807	4
9530	97909	5	9580	98137	4	9630	98363	4	9680	98588	4	9730	98811	5
		5			5			4			4			5
9531	97914	4	9581	98141	5	9631	98367	5	9681	98592	5	9731	98816	4
9532	97918	5	9582	98146	4	9632	98372	4	9682	98597	4	9732	98820	5
9533	97923	5	9583	98150	5	9633	98376	5	9683	98601	5	9733	98825	4
9534	97928	4	9584	98155	4	9634	98381	4	9684	98605	4	9734	98829	5
9535	97932	5	9585	98159	5	9635	98385	5	9685	98610	5	9735	98834	4
		5			5			4			4			5
9536	97937	4	9586	98164	4	9636	98390	4	9686	98614	5	9736	98838	5
9537	97941	5	9587	98168	5	9637	98394	5	9687	98619	4	9737	98843	4
9538	97946	4	9588	98173	4	9638	98399	4	9688	98623	5	9738	98847	4
9539	97950	5	9589	98177	5	9639	98403	5	9689	98628	4	9739	98851	5
9540	97955	4	9590	98182	4	9640	98408	4	9690	98632	5	9740	98856	4
		5			4			4			5			4
9541	97959	5	9591	98186	5	9641	98412	5	9691	98637	4	9741	98860	5
9542	97964	4	9592	98191	4	9642	98417	4	9692	98641	5	9742	98865	4
9543	97968	5	9593	98195	5	9643	98421	5	9693	98646	4	9743	98869	5
9544	97973	5	9594	98200	4	9644	98426	4	9694	98650	5	9744	98874	4
9545	97978	4	9595	98204	5	9645	98430	5	9695	98655	4	9745	98878	5
		5			5			4			5			4
9546	97982	5	9596	98209	5	9646	98435	4	9696	98659	5	9746	98883	4
9547	97987	4	9597	98214	4	9647	98439	5	9697	98664	4	9747	98887	5
9548	97991	5	9598	98218	5	9648	98444	4	9698	98668	5	9748	98892	4
9549	97996	4	9599	98223	4	9649	98448	5	9699	98673	4	9749	98896	4
9550	98000		9600	98227		9650	98453		9700	98677		9750	98900	

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
9751	98965	5	9801	99127	4	9851	99348	4	9901	99568	4	9951	99787	5
9752	98969	4	9802	99131	4	9852	99352	4	9902	99572	4	9952	99791	4
9753	98974	5	9803	99136	5	9853	99357	5	9903	99577	5	9953	99795	4
9754	98978	4	9804	99140	4	9854	99361	4	9904	99581	4	9954	99800	5
9755	98982	4	9805	99145	5	9855	99366	5	9905	99585	4	9955	99804	4
9756	98987	5	9806	99149	4	9856	99370	4	9906	99590	5	9956	99808	4
9757	98991	4	9807	99154	5	9857	99374	4	9907	99594	4	9957	99813	5
9758	98996	5	9808	99158	4	9858	99379	5	9908	99599	5	9958	99817	4
9759	99000	4	9809	99162	4	9859	99383	4	9909	99603	4	9959	99822	5
9760	99005	5	9810	99167	5	9860	99388	5	9910	99607	4	9960	99826	4
9761	98949	4	9811	99171	4	9861	99392	4	9911	99612	5	9961	99830	4
9762	98954	5	9812	99176	5	9862	99396	4	9912	99616	4	9962	99835	5
9763	98958	4	9813	99180	4	9863	99401	5	9913	99621	5	9963	99839	4
9764	98963	5	9814	99185	5	9864	99405	4	9914	99625	4	9964	99843	4
9765	98967	4	9815	99189	4	9865	99410	5	9915	99629	4	9965	99848	5
9766	98972	5	9816	99193	4	9866	99414	4	9916	99634	5	9966	99852	4
9767	98976	4	9817	99198	5	9867	99419	5	9917	99638	4	9967	99856	4
9768	98981	5	9818	99202	4	9868	99423	4	9918	99642	4	9968	99861	5
9769	98985	4	9819	99207	5	9869	99427	4	9919	99647	5	9969	99865	4
9770	98989	4	9820	99211	4	9870	99432	5	9920	99651	4	9970	99870	5
9771	98994	5	9821	99216	5	9871	99436	4	9921	99656	5	9971	99874	4
9772	98998	4	9822	99220	4	9872	99441	5	9922	99660	4	9972	99878	4
9773	99003	5	9823	99224	4	9873	99445	4	9923	99664	4	9973	99883	5
9774	99007	4	9824	99229	5	9874	99449	5	9924	99669	5	9974	99887	4
9775	99012	5	9825	99233	4	9875	99454	4	9925	99673	4	9975	99891	4
9776	99016	4	9826	99238	5	9876	99458	4	9926	99677	4	9976	99896	5
9777	99021	5	9827	99242	4	9877	99463	5	9927	99682	5	9977	99900	4
9778	99025	4	9828	99247	5	9878	99467	4	9928	99686	4	9978	99904	4
9779	99029	4	9829	99251	4	9879	99471	4	9929	99691	5	9979	99909	5
9780	99034	5	9830	99255	4	9880	99476	5	9930	99695	4	9980	99913	4
9781	99038	4	9831	99260	5	9881	99480	4	9931	99699	4	9981	99917	4
9782	99043	5	9832	99264	4	9882	99484	4	9932	99704	5	9982	99922	5
9783	99047	4	9833	99269	5	9883	99489	5	9933	99708	4	9983	99926	4
9784	99052	5	9834	99273	4	9884	99493	4	9934	99712	4	9984	99930	4
9785	99056	4	9835	99277	4	9885	99498	5	9935	99747	5	9985	99935	5
9786	99061	5	9836	99282	5	9886	99502	4	9936	99721	4	9986	99939	4
9787	99065	4	9837	99286	4	9887	99506	4	9937	99726	5	9987	99944	5
9788	99069	4	9838	99291	5	9888	99511	5	9938	99730	4	9988	99948	4
9789	99074	5	9839	99295	4	9889	99515	4	9939	99734	4	9989	99952	4
9790	99078	4	9840	99300	5	9890	99520	5	9940	99739	5	9990	99957	5
9791	99083	5	9841	99304	4	9891	99524	4	9941	99743	4	9991	99961	4
9792	99087	4	9842	99308	4	9892	99528	4	9942	99747	4	9992	99965	4
9793	99092	5	9843	99313	5	9893	99533	5	9943	99752	5	9993	99970	5
9794	99096	4	9844	99317	4	9894	99537	4	9944	99756	4	9994	99974	4
9795	99100	4	9845	99322	5	9895	99542	5	9945	99760	4	9995	99978	4
9796	99105	5	9846	99326	4	9896	99546	4	9946	99765	5	9996	99983	5
9797	99109	4	9847	99330	4	9897	99550	4	9947	99769	4	9997	99987	4
9798	99114	5	9848	99335	5	9898	99555	5	9948	99774	5	9998	99991	4
9799	99118	4	9849	99339	4	9899	99559	4	9949	99778	4	9999	99996	5
9800	99123	5	9850	99344	5	9900	99564	5	9950	99782	4	10000	00000	4

FIN.